DIE TRIGONOMETRISCHE

PUNKTENBESTIMMUNG

DURCH EINSCHNEIDEN.

ALS NACHTRAG

ZU DES VERFASSERS

„DIE TRIGONOMETRISCHEN UND POLYGONOMETRISCHEN RECHNUNGEN IN DER FELDMESSKUNST.“

BEARBEITET

VON

F. G. GAUSS,

KÖNIGL. PREUSS. GENERAL-INSPECTOR DES KATASTERS.

DAS RECHT DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN WIRD VORBEHALTEN.

HALLE A. S.

VERLAG VON EUGEN STRIEN.

(VORMALS VERLAG VON LUDWIG RAUH IN BERLIN.)

1877.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

VORWORT.

Die im § 22 meiner „Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst“ (Berlin, 1876, Seite 67 bis 83 und 156 bis 158) vorgeschlagene Methode der trigonometrischen Punktenbestimmung durch „Einschneiden“ hat schnell mannigfache praktische Anwendung gefunden. Soviel ich habe warnehmen können, hat sich hierbei das Bedürfnis herausgestellt, die Methode ausfürlicher zu bearbeiten, als es dort geschehen, um namentlich den in trigonometrischen Arbeiten noch wenig Geübten die Anwendung zu erleichtern. Auch ist es wünschenswert, einige bei der praktischen Anwendung inzwischen gewonnenen Erfarungen zur Kenntnis der Berufsgenossen zu bringen. Dies hat mich veranlasst, das vorliegende Schriftchen der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Ferner habe ich im § 33 der „Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen etc.“ die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe des „Rückwärtseinschneidens“ in der Voraussetzung, dass dieses für die Zwecke der niederen Geodäsie im Allgemeinen genügen werde, und in der Absicht, dem in der Praxis stehenden Geometer die Anwendung in möglichst einfacher Form vor Augen zu füren, one Rücksicht auf diejenigen Unterscheidungen in dem Ansatze der Fehlergleichungen bearbeitet, welche bei strengerer Behandlung durch die Art und Weise der Ausfürung der Winkelbeobachtung bedingt werden. Wenn ich hoffte, durch diese Einschränkung der dringend wünschenswerten Verbreitung der Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf die Punktenbestimmung durch Rückwärtseinschneiden Vorschub zu leisten, so ist andererseits doch auch zu bedenken, dass man nur einen kleinen Schritt weiter zu gehen braucht, um zu strengerer Behandlung zu gelangen. Ich habe daher die Gelegenheit der ausfürlicheren Bear-

beitung des „Einschneidens“ gleichzeitig benutzt, um auch das „Rückwärtseinschneiden“, welches überdies nur ein besonderer Fall des „Einschneidens“ ist und deshalb von Letzterem nicht wol getrennt werden kann, in erweiterter Form zu behandeln. Dabei hege ich nicht die Ansicht, in dieser Bearbeitung des Rückwärtseinschneidens nach der Methode der kleinsten Quadrate den Berufsgenossen tatsächlich Neues zu bieten. Mein Zweck ist vielmehr darauf gerichtet, dem Geometer die Anwendung der Aufgabe zu erleichtern, indem ich sie durch die Form der Darstellung und die Erläuterung an Rechenbeispielen seinem Verständnis widerholt näher zu bringen suche.

Beide Methoden, das „Einschneiden“ wie das „Rückwärtseinschneiden“ — Letzteres vorzugsweise mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate — verdienen, wie ich bereits auf Seite 152 meiner „Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen etc.“ betont habe, bezüglich ihres Werts für die niedere Geodäsie wol unbedenklich den ersten Platz unter den verschiedenen Arten der trigonometrischen Punktenbestimmung. Möge auch das vorliegende Schriftchen dazu beitragen, diese Auffassung unter den Berufsgenossen zu allgemeiner Geltung zu bringen.

Berlin, im Februar 1877.

Gaufs.

Unter dem Einschneiden eines Punktes ist dasjenige Verfaren der trigonometrischen Punktenbestimmung verstanden, welches aus gegebenen (oder bereits fest bestimmten) Punkten auf ein Mal immer nur einen einzelnen Punkt — für sich allein und one Abhängigkeit von anderen, gleichzeitig zu bestimmenden Punkten — durch Winkelmessung festlegt.

Findet die Winkelmessung lediglich auf dem zu bestimmenden Punkte statt, dergestalt, dass die Winkel oder Richtungen der Stralen nach gegebenen Punkten gemessen werden, so liegt der Fall des „Rückwärtseinschneiden"s vor.

Das „Vorwärtseinschneiden" dagegen bestimmt umgekehrt den Punkt allein aus den auf den gegebenen Punkten gemessenen Winkeln oder Richtungen, welche die Stralen nach dem zu bestimmenden Punkte mit den Stralen nach gegebenen Punkten bilden.

Ist beides der Fall, sind also auf gegebenen Punkten Stralen nach dem zu bestimmenden Punkte und zugleich auf dem zu bestimmenden Punkte Stralen nach gegebenen Punkten beobachtet, so ist dies mit dem allgemeinen Ausdruck „Einschneiden" bezeichnet.

§ 1.

Für die Punktenbestimmung durch „Rückwärtseinschneiden" (die Pothenot'sche Aufgabe) müssen mindestens drei Punkte ihrer Lage nach gegeben sein. Diese Punkte seien P_a, P_m, P_b und die gegebenen Koordinaten derselben y_a, x_a, y_m, x_m, y_b, x_b. Die Aufgabe verlangt die Bestimmung der Koordinaten y, x des vierten Punktes P aus den Winkeln α, β, welche die Geraden $PP_a = s_a$, $PP_m = s_m$, $PP_b = s_b$ in P mit einander bilden.

Fig. 1.

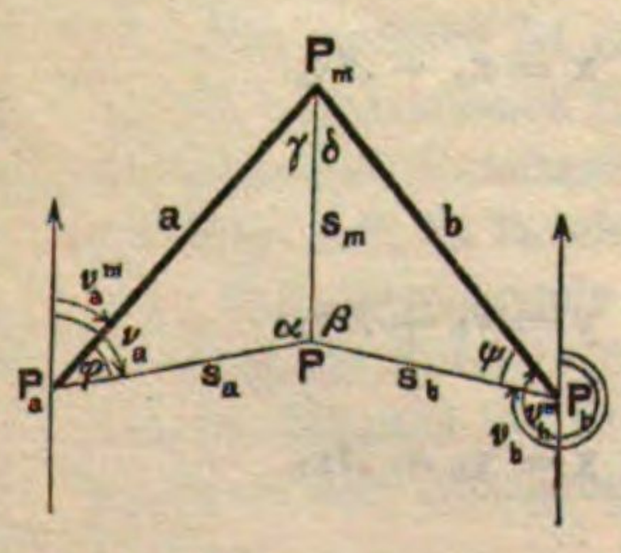


Fig. 2.

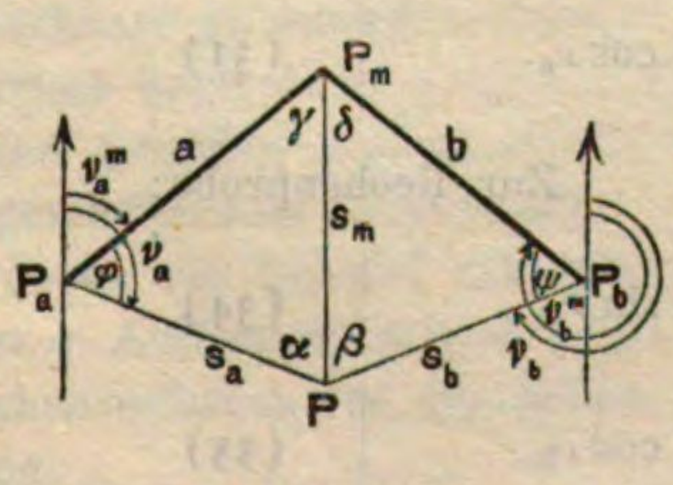
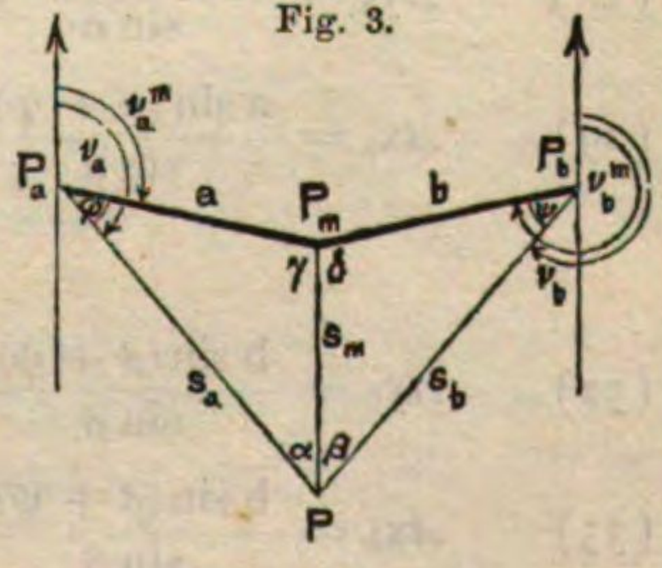


Fig. 3.



1. Auflösung.

a) Berechnung der Neigungen ν_a^m und ν_b^m, der Längen a und b, und des $\sphericalangle(\gamma+\delta)$.

(1) $\operatorname{tg}\nu_a^m = \dfrac{y_m - y_a}{x_m - x_a}$.

(2) $a = \dfrac{y_m - y_a}{\sin\nu_a^m} = \dfrac{x_m - x_a}{\cos\nu_a^m}$.

(3) $\operatorname{tg}\nu_b^m = \dfrac{y_m - y_b}{x_m - x_b}$.

(4) $b = \dfrac{y_m - y_b}{\sin\nu_b^m} = \dfrac{x_m - x_b}{\cos\nu_b^m}$.

(5) $(\gamma+\delta) = \nu_a^m - \nu_b^m$.

b) Berechnung der $\sphericalangle\sphericalangle$ φ, ψ, γ, δ.

(6) $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$.

(7) $2\sigma = \alpha+\beta+(\gamma+\delta)$.

(8) $\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \pi - \sigma$.

(9) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \operatorname{ctg}(\frac{1}{4}\pi+\mu)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$.

(10) $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi+\psi) + \frac{1}{2}(\varphi-\psi)$.

(11) $\psi = \frac{1}{2}(\varphi+\psi) - \frac{1}{2}(\varphi-\psi)$.

(12) $\gamma = \pi - (\alpha+\varphi)$.

(13) $\delta = \pi - (\beta+\psi) = (\gamma+\delta) - \gamma$.

c) Berechnung der $\triangle\triangle$ $P P_a P_m$ und $P P_m P_b$.

(14) $s_a = \sin\gamma\,\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

(15) $s_m = \sin\varphi\,\dfrac{a}{\sin\alpha} = \sin\psi\,\dfrac{b}{\sin\beta}$.

(16) $s_b = \sin\delta\,\dfrac{b}{\sin\beta}$.

Rechenprobe:

(17) $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{\sin\psi}{\sin\varphi}$.

d) Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten y, x für P.

(18) $\nu_a = \nu_a^m + \varphi$.

(19) $\Delta y_a = s_a \sin\nu_a$.

(20) $\Delta x_a = s_a \cos\nu_a$.

(21) $y = y_a + \Delta y_a$.

(22) $x = x_a + \Delta x_a$.

Zur Rechenprobe:

(23) $\nu_b = \nu_b^m - \psi$.

(24) $\Delta y_b = s_b \sin\nu_b$.

(25) $\Delta x_b = s_b \cos\nu_b$.

(26) $y = y_b + \Delta y_b$.

(27) $x = x_b + \Delta x_b$.

Da als Schlussergebnis der Rechnung die Koordinaten y, x verlangt und auch allein weiter verwendet zu werden pflegen, so wird die Kenntnis von s_a, s_b, s_m nicht erforderlich und daher die besondere Dreiecksberechnung unter c entbehrlich sein. Hierdurch und in der Erwägung, dass in dem Falle dieser Aufgabe stets sin $\gamma = \sin(\alpha+\varphi)$ und sin $\delta = \sin(\beta+\psi)$ genommen werden kann, lassen sich die Formeln (12) bis (27) zur Abkürzung der Rechnung, wie folgt, zusammenziehen:

(28) $\Delta y_a = \dfrac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\sin\nu_a$.

(29) $\Delta x_a = \dfrac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\cos\nu_a$.

(30) $y = y_a + \Delta y_a$.

(31) $x = x_a + \Delta x_a$.

Zur Rechenprobe:

(32) $\Delta y_b = \dfrac{b\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\sin\nu_b$.

(33) $\Delta x_b = \dfrac{b\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\cos\nu_b$.

(34) $y = y_b + \Delta y_b$.

(35) $x = x_b + \Delta x_b$.

Dabei ist man im Laufe der Rechnung in der Lage, noch die Proben:

$$(\gamma+\delta)+(\alpha+\varphi)+(\beta+\psi)=2\pi, \tag{36}$$

$$\Delta y_a-\Delta y_b=y_b-y_a, \tag{37}$$

$$\Delta x_a-\Delta x_b=x_b-x_a. \tag{38}$$

zu ziehen. Hiervon muss die Winkelprobe (36) scharf, die beiden anderen Proben (37) und (38) aber müssen bis auf sehr kleine Differenzen abschliefsen, welche aus der unvermeidlichen Ungenauigkeit der letzten Ziffern der betreffenden Zalen entspringen. Werden diese Differenzen dadurch, dass Δy_a, Δx_a, Δy_b, Δx_b die entsprechenden Korrektionen beigefügt werden, sogleich verbessert, so muss y, x aus beiden Herleitungen übereinstimmend hervorgehen.

2. Auflösung.

Statt der Formeln (6) und (9) kann man zur Bestimmung von $\frac{\varphi-\psi}{2}$ auch folgende Formeln anwenden:

$$m=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{39}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{b-m}{b+m}\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}. \tag{40}$$

3. Auflösung.

Auch lässt sich φ und ψ, statt aus den Formeln (6), (9), (10) und (11), noch finden, wie folgt:

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\sin(\varphi+\psi)}+\operatorname{ctg}(\varphi+\psi). \tag{41}$$

$$\psi=(\varphi+\psi)-\varphi. \tag{42}$$

oder:

$$\operatorname{ctg}\psi=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta\sin(\varphi+\psi)}+\operatorname{ctg}(\varphi+\psi). \tag{43}$$

$$\varphi=(\varphi+\psi)-\psi. \tag{44}$$

Die Formeln sind one jede Abänderung unmittelbar anwendbar für alle Lagen der Punkte, wenn bei der Bezeichnung derselben der, von P aus gesehen, links liegende Punkt mit P_a, der rechts liegende Punkt mit P_b, der zwischen beiden liegende Punkt mit P_m bezeichnet wird, und im Anschluss hieran die übrigen Bezeichnungen nach Anleitung der Figuren 1, 2, 3 gewält werden.

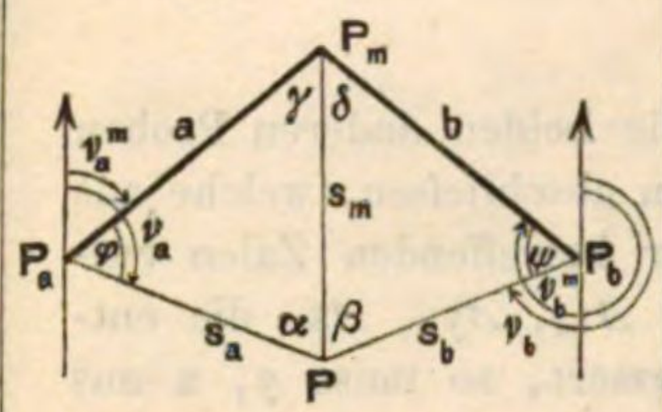
$\operatorname{tg}\mu$ in (6) und m in (39) werden stets positiv sein. Wenn $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ negativ ausfällt, wird der zugehörige Winkel zweckmäfsig mit negativem Vorzeichen in die weitere Rechnung eingefürt. Wenn in der Formel (5) $\nu_b^m>\nu_a^m$, ist ν_a^m um 2π zu vergröfsern.

Die Aufgabe ist überhaupt unbestimmt, wenn P in der Peripherie des durch P_a, P_m, P_b beschriebenen Kreises liegt, d. h. wenn $\sigma=\frac{1}{2}\pi$. Die Genauigkeit, mit welcher die gesuchten Unbekannten gefunden werden, ist am gröfsten, wenn P im Mittelpunkte des dem $\triangle P_a P_m P_b$ eingeschriebenen Kreises liegt.

Das nachfolgende durch ein Beispiel erläuterte Rechenformular bringt die Anwendung der Formeln der 1. Auflösung, welche wegen des geringeren Zeiterfordernisses und der Eleganz des Rechenverfarens vor den beiden anderen Auflösungen den Vorzug verdient, zur Anschauung.

Rückwärtseinschneiden.

No. 1.



Zu bestimmender Punkt.

P: Brand.

		±			±	
P_m: Pomme.	y_m	+	11 621,96	x_m	—	35 073,82
P_a: Baltrup.	y_a	+	7 329,38	x_a	—	39 075,67
P_b: Haidfeld.	y_b	+	12 415,76	x_b	—	39 129,19
Rechenproben:	y_m-y_a	+	4 292,58	x_m-x_a	+	4 001,85
	y_m-y_b	—	793,80	x_m-x_a	+	4 055,37
$(y_m-y_a)-(y_m-y_b)=(y_b-y_a)$	y_b-y_a	+	5 086,38	x_b-x_a	—	53,52
$(x_m-x_a)-(x_m-x_b)=(x_b-x_a)$			— 7			— 1
	Δy_a	+	3 807,42	Δx_a	+	1 278,50
$\Delta y_a-\Delta y_b=(y_b-y_a)$.			+ 3			+ 1
$\Delta x_a-\Delta x_b=(x_b-x_a)$.	Δy_b	—	1 279,06	Δx_b	+	1 332,00
	y	+	11 136,73	x	—	37 797,18

	°	′	″
ν_a^m	47	0	28
ν_b^m	348	55	30
$\gamma+\delta=\nu_a^m-\nu_b^m$	58	4	58
α	118	39	57
β	126	3	25
$2\sigma=\alpha+\beta+(\gamma+\delta)$	302	48	20
σ	151	24	10
μ	52	36	44
$\frac{1}{4}\pi+\mu$	97	36	44
$\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=\pi-\sigma$	28	35	50
±			
$\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ —	4	10	1
$\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)+\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	24	25	49
$\psi=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)-\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	32	45	51
$\alpha+\varphi$	143	5	46
$\beta+\psi$	158	49	16
$\gamma+\delta$	58	4	58
Soll $=2\pi$	*360*	*0*	*0*
$\nu_a=\nu_a^m+\varphi$	71	26	17
$\nu_b=\nu_b^m-\psi$	316	9	39

$$tg\,\nu_a^m=\frac{y_m-y_a}{x_m-x_a}.$$

$$a=\frac{y_m-y_a}{\sin\nu_a^m}=\frac{x_m-x_a}{\cos\nu_a^m}.$$

$\log(y_m-y_a)$	3. 63 272
$-\log(x_m-x_a)$	3. 60 226
$\log tg\,\nu_a^m$	0. 03 046
$\log\sin\nu_a^m$	9. 86 418
$\log\cos\nu_a^m$	9. 83 372
$\log a$	3. 76 854

$$tg\,\mu=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}.$$

$\log a$	3. 76 854
$+\,cpl\log b$	6. 38 381
$+\log\sin\beta$	9. 90 764
$+\,cpl\log\sin\alpha$	0. 05 679
$\log tg\,\mu$	0. 11 678

$$\Delta y_a=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\sin\nu_a.$$

$$\Delta x_a=\frac{a\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}\cos\nu_a.$$

$\log\sin\nu_a$	9. 97 680
$\log a$	3. 76 854
$\log\sin(\alpha+\varphi)$	9. 77 850
$cpl\log\sin\alpha$	0. 05 679
$\log\cos\nu_a$	9. 50 287
$\log\Delta y_a$	3. 58 063
$\log\Delta x_a$	3. 10 670

$$tg\,\nu_b^m=\frac{y_m-y_b}{x_m-x_b}.$$

$$b=\frac{y_m-y_b}{\sin\nu_b^m}=\frac{x_m-x_b}{\cos\nu_b^m}.$$

$\log(y_m-y_b)$	2. 89 971n
$-\log(x_m-x_b)$	3. 60 803
$\log tg\,\nu_b^m$	9. 29 168n
$\log\sin\nu_b^m$	9. 28 352n
$\log\cos\nu_b^m$	9. 99 184
$\log b$	3. 61 619

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)=ctg\,(\tfrac{1}{4}\pi+\mu)\,tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi).$$

$\log ctg\,(\frac{1}{4}\pi+\mu)$	9. 12 595n
$+\log tg\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$	9. 73 652
$\log tg\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$	8. 86 247n

$$\Delta y_b=\frac{b\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\sin\nu_b.$$

$$\Delta x_b=\frac{b\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}\cos\nu_b.$$

$\log\sin\nu_b$	9. 84 050n
$\log b$	3. 61 619
$\log\sin(\beta+\psi)$	9. 55 784
$cpl\log\sin\beta$	0. 09 236
$\log\cos\nu_b$	9. 85 811
$\log\Delta y_b$	3. 10 689n
$\log\Delta x_b$	3. 12 450

Haben auf dem zu bestimmenden Punkte P nach mehr als drei gegebenen Punkten die Stralen beobachtet werden können, so sind überschüssige Bestimmungen gegeben, deren Vorhandensein zur Sicherung der Punktbestimmung sehr erwünscht, sogar notwendig ist. Man wird daraus verschiedene Kombinationen der in Rechnung zu

stellenden gegebenen drei Punkte bilden und für diejenigen Kombinationen, welche sich durch günstige Lage der Punkte auszeichnen, nach den oben zusammengestellten Formeln die gesuchten Koordinaten y, x widerholt berechnen, endlich aus den so auf verschiedenen Wegen erhaltenen Werten für y, x, welche stets um einiges von einander abweichen werden, das arithmetische Mittel nehmen können. Allein dies fürt leicht zu sehr umfangreichen Rechnungen, da, wenn beispielsweise nach 4 gegebenen Punkten die Richtungen gemessen worden, auch 4 Kombinationen möglich, mithin 4 einzelne Rechnungen auszufüren sind. Bei 5 gegebenen Punkten würden sich schon 10 Kombinationen, bei n gegebenen Punkten

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \tag{45}$$

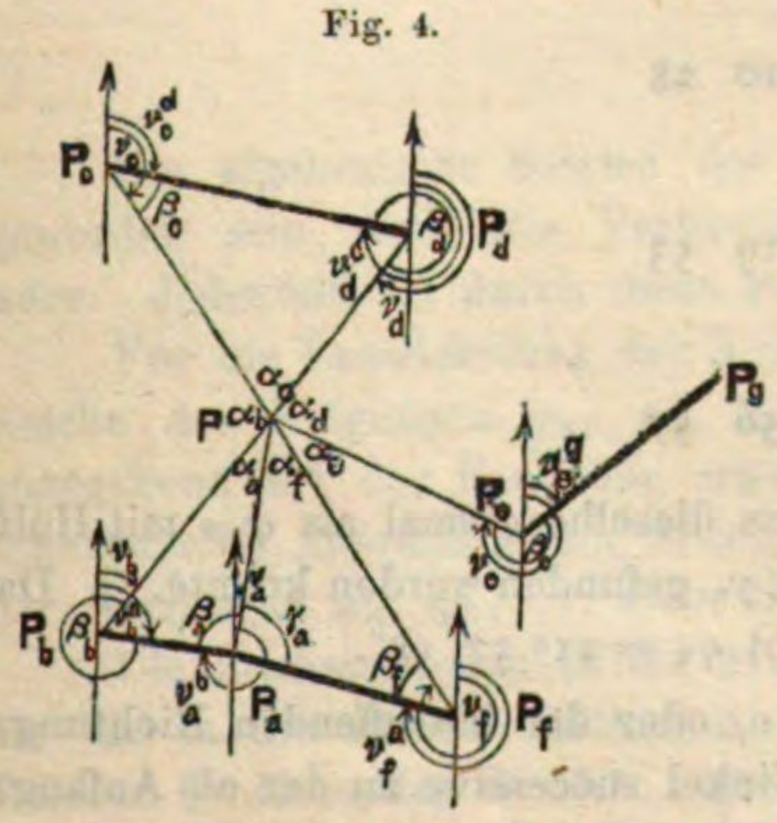
Kombinationen ermöglichen lassen. Dabei wird in dem arithmetischen Mittel unter Umständen immerhin ein Ergebnis von nur beschränkter Genauigkeit erzielt. Dagegen ist die Methode der kleinsten Quadrate vorzüglich geeignet, diese Uebelstände zu umgehen, und gerade beim Rückwärtseinschneiden tritt einer derjenigen Fälle ein, in welchem die Anwendung dieser Methode auch für die Zwecke der niederen Geodäsie fast unentbehrlich ist. Sie erfordert einen geringeren, mindestens nicht einen gröfseren Zeitaufwand, als die widerholte Berechnung von y, x, selbst wenn die Zal der Punktenkombinationen auf wenige besonders geeignete beschränkt wird. Die Anwendung der Methode wird in den §§ 5 und 6 gezeigt werden.

§ 2.

Die Aufgabe des „Einschneidens“ wird, soweit nicht auch für diese die Fehlerausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (§ 7) bewirkt wird, zweckmäfsig mit Zuhülfenahme des graphischen Rechnens gelöst. Um diese in Nachstehendem beschriebene Lösung zu ermöglichen, müssen sich unter den gegebenen Punkten, auf welchen die Stralen nach dem zu bestimmenden Punkte durch Winkelmessung festgelegt sind, mehrere befinden, nach welchen auch die Stralen von dem zu bestimmenden Punkte aus beobachtet worden sind. Ist diese Vorbedingung nicht erfüllt, dann muss zur Methode der kleinsten Quadrate gegriffen werden.

Der Fall des „Vorwärtseinschneidens“ bedarf nicht der besonderen Behandlung, da derselbe sich als ein vereinfachter Fall des „Einschneidens“ darstellt.

Fig. 4.



Es seien mit Bezug auf Fig. 4 gegeben die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f, P_g wie folgt:

Punkt	y	x
P_a	— 25 663,24^m	+ 26 121,54^m
P_b	— 28 407,89	+ 26 431,70
P_c	— 27 933,66	+ 36 056,72
P_d	— 21 785,34	+ 34 388,18
P_e	— 19 756,53	+ 28 261,63
P_f	— 21 293,63	+ 24 688,12
P_g	— 15 715,52	+ 31 291,57

Daraus ergeben sich die Neigungen der bezüglichen Strecken gegen die Abscissenachse nach § 13 der „Trigon. und polygon. Rechnungen“:

$$\nu_a^b = 276^\circ\ 26'\ 51''$$
$$\nu_a^f = 108\ \ 9\ 43$$
$$\nu_c^d = 105\ 10\ 58$$
$$\nu_c^g = \ 53\ \ 8\ 16$$

Durch Messung sind gefunden:

die Winkel	oder die betreffenden Richtungswinkel	ferner die Winkel
$\alpha_a = 28° 37' 7''$	nach $P_a = 0° 0' 0''$	$\beta_a = 95° 11' 14''$
$\alpha_b = 108 3 19$	„ $P_b = 28 37 7$	$\gamma_a = 96 31 53$
$\alpha_c = 70 52 10$	„ $P_c = 136 40 26$	$\beta_b = 303 48 2$
$\alpha_d = 78 9 35$	„ $P_d = 207 32 36$	$\beta_c = 43 7 27$
$\alpha_e = 33 36 54$	„ $P_e = 285 42 11$	$\beta_d = 293 59 30$
$\alpha_f = 40 40 55$	„ $P_f = 319 19 5$	$\beta_e = 244 11 37$
$360 0 0$	„ $P_a = 360 0 0$	$\beta_f = 42 47 14.$

Um hiermit die Koordinaten des Punktes P zu bestimmen, werden zunächst die Neigungswinkel $\mu_a, \mu_b, \ldots, \mu_f$ der auf den Punkt P zulaufenden Stralen hergeleitet. Sie werden doppelt erhalten, das eine Mal mit Hülfe der $\measuredangle\measuredangle$ $\beta_a, \gamma_a, \beta_b, \ldots, \beta_f$, das andere Mal mit Hülfe der $\measuredangle\measuredangle$ $\alpha_a, \alpha_b, \ldots, \alpha_f$ oder der betreffenden Richtungswinkel.

Die Ableitung aus den $\measuredangle\measuredangle$ $\beta_a, \gamma_a, \beta_b, \ldots$ kann, wie folgt, geschehen:

$\nu_a^b = 276° 26' 51''$
$+ \beta_a = 95 11 14$

$\varphi_{a\beta} = 11° 38' 5''$
$\varphi_{a\gamma} = 11 37 50$
$\Big\} \varphi_a = 11° 37' 58''$

$\nu_a^f = 108 9 43$
$- \gamma_a = 96 31 53$

$\nu_b^a = 96 26 51$
$+ \beta_b = 303 48 2$

$\varphi_b = 40 14 53$

$\nu_c^d = 105 10 58$
$+ \beta_c = 43 7 27$

$\varphi_c = 148 18 25$

$\nu_d^c = 285 10 58$
$+ \beta_d = 293 59 30$

$\varphi_d = 219 10 28$

$\nu_e^g = 53 8 16$
$+ \beta_e = 244 11 37$

$\varphi_e = 297 19 53$

$\nu_f^a = 288 9 43$
$+ \beta_f = 42 47 14$

$\varphi_f = 330 56 57.$

In Betreff der Neigung φ_a ist zu beachten, dass dieselbe einmal als $\varphi_{a\beta}$ mit Hülfe des $\measuredangle \beta_a$, das andere Mal als $\varphi_{a\gamma}$ mit Hülfe des $\measuredangle \gamma_a$ gefunden werden konnte. *) Das arithmetische Mittel aus beiden Herleitungen ergibt $\varphi_a = 11° 37' 58''$.

Um auch mit Hülfe der $\measuredangle\measuredangle$ $\alpha_a, \alpha_b, \ldots, \alpha_f$ oder der betreffenden Richtungswinkel die Neigungen zu erhalten, werden diese Winkel successive zu der als Anfangsneigung anzunehmenden Neigung $\varphi_a = 11° 37' 58''$ addirt. Bei Benutzung der Richtungswinkel stellt sich die Rechnung wie folgt:

---

*) An die Stelle dieser zum leichteren Verständnis vorläufig gewälten Art der Herleitung der Neigungen φ tritt in der Anwendung, wie sie in der Praxis gewönlich vorkommen wird, die materiell auf das Gleiche hinauslaufende Art der Herleitung des § 4.

Richtungswinkel					
nach	$P_a =$	0°	0′	0″	$\psi_a =$ 11° 37′ 58″
„	$P_b =$	28	37	7	$\psi_b =$ 40 15 5
„	$P_c =$	136	40	26	$\psi_c =$ 148 18 24
„	$P_d =$	207	32	36	$\psi_d =$ 219 10 34
„	$P_e =$	285	42	11	$\psi_e =$ 297 20 9
„	$P_f =$	319	19	5	$\psi_f =$ 330 57 3

Diese Werte der Neigungen ψ_a, ψ_b, ... sind nur vorläufige, da ihnen aus der Reihe der Neigungen φ_a, φ_b, ... nur die eine Neigung φ_a zu Grunde gelegt ist, während ihnen ein Mittelwert aus allen Neigungen φ_a, φ_b, ..., φ_f hätte zu Grunde gelegt werden sollen. Um dementsprechend die Neigungen ψ_a, ψ_b, ... zu verbessern, bilde man die Differenzen:

$$\begin{aligned}
\varphi_a - \psi_a &= \pm\ 0'' \\
\varphi_b - \psi_b &= -\ 12 \\
\varphi_c - \psi_c &= +\ 1 \\
\varphi_d - \psi_d &= -\ 6 \\
\varphi_e - \psi_e &= -\ 16 \\
\varphi_f - \psi_f &= -\ 6 \\
\hline
\text{deren algebraische Summe } [\varphi - \psi] &= -\ 39''
\end{aligned}$$

ist.

Die Division dieser Summe durch die Anzal n der Neigungen ergibt $o = \frac{[\varphi - \psi]}{n} = \frac{-39}{6} = -6''$, welcher Wert als Orientirungsverbesserung den vorläufigen Werten von ψ_a, ψ_b, ... zuzulegen ist. Damit erhält man die schliefslichen Neigungen ψ:

$\psi_a =$	11°	37′	52″	und $\varphi_a - \psi_a =$	+ 6″
$\psi_b =$	40	14	59	$\varphi_b - \psi_b =$	− 6
$\psi_c =$	148	18	18	$\varphi_c - \psi_c =$	+ 7
$\psi_d =$	219	10	28	$\varphi_d - \psi_d =$	± 0
$\psi_e =$	297	20	3	$\varphi_e - \psi_e =$	− 10
$\psi_f =$	330	56	57	$\varphi_f - \psi_f =$	± 0
					+ 13″
					− 16.

Die algebraische Summe der Differenzen wird jetzt $= -3''$. Sie würde $= o$ geworden sein, wenn die Verbesserung $-6''$ nicht ein abgerundeter Wert gewesen wäre. Jedenfalls ist durch diese Probe die Richtigkeit der Rechnung erwiesen.

Für die Entwickelung der Neigungen ψ_a, ψ_b, ... ist es an sich ganz gleichgültig, welche der Neigungen φ_a, φ_b, φ_c, ... als Anfangsneigung angenommen wird. Die angegebene Art der Rechnung wird stets zu denselben Resultaten füren. Für die schematische Anordnung der Rechnung wird es aber zweckmässig sein, aus der Reihe der Neigungen φ_a, φ_b, ... stets die kleinste als Anfangsneigung zu wälen.

Die arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\varphi_a + \psi_a) = \mu_a$, $\frac{1}{2}(\varphi_b + \psi_b) = \mu_b$, ... können nun als die in die weitere Rechnung einzufürenden Neigungen der zur Bestimmung des Punktes P dienenden Stralen angenommen werden. Sie sind:

$\mu_a =$	11°	37′	55″
$\mu_b =$	40	14	56
$\mu_c =$	148	18	22
$\mu_d =$	219	10	28
$\mu_e =$	297	19	58
$\mu_f =$	330	56	57.

Der Vorgang bei Bestimmung der Neigungen μ lässt sich durch folgende Vorstellung verdeutlichen. Man denke ein Rad, dessen Speichenstellung den Neigungen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \ldots, \varphi_f$ entspricht; dazu ein zweites Rad, in welchem die Speichen untereinander die $\measuredangle\measuredangle$ $\alpha_a, \alpha_b, \ldots, \alpha_f$ bilden. Wird das zweite Rad centrisch so auf das erste gelegt, dass diejenigen beiden Speichen sich decken, welche den Stral, dessen Neigung als Anfangsneigung angenommen worden ist, darstellen, so werden in den Abweichungen der korrespondirenden übrigen Speichen beider Räder die Differenzen $\varphi_b - \psi_b, \varphi_c - \psi_c, \ldots$ zum Ausdruck gelangen. Nun kommt es darauf an, das obere Rad so zu drehen, dass die algebraische Summe der Abweichungen gleich Null wird. Das Mafs der Drehung drückt sich in der Korrektion $o = \frac{[\varphi - \psi]}{n}$ aus, welche oben den vorläufigen Werten für $\psi_a, \psi_b, \psi_c, \ldots$ hinzugefügt worden ist, um deren definitive Werte zu erhalten. Schliefslich erübrigt nur noch, aus der abweichenden Stellung der korrespondirenden Speichen beider Räder das arithmetische Mittel zu nehmen, wodurch man die Speichenstellung eines dritten Rades erhält, welche den Neigungen $\mu_a, \mu_b, \ldots, \mu_f$ entspricht.

Man berechne weiter aus einem günstig gestalteten Schnitt zweier Stralen nach § 14 der „Trigon. und polygon. Rechnungen“ eine angenäherte Ordinate η für den Punkt P. Die von den Punkten P_b und P_f ausgehenden Stralen ergeben $\eta = -24\,697{,}05^m$, wofür abgerundet $\eta = -24\,697{,}10^m$ angenommen werden mag. In dem Abstande η denke man eine Parallele zur Abscissenachse gezogen und berechne die Abstände $\xi_a, \xi_b, \ldots, \xi_f$ von der durch den Koordinatennullpunkt gezogenen Senkrechten zur Abscissenachse, in welchen jene Parallele durch die von $P_a, P_b, \ldots, P_f$ ausgehenden Stralen geschnitten wird. Man erhält diese Abstände aus den Formeln:

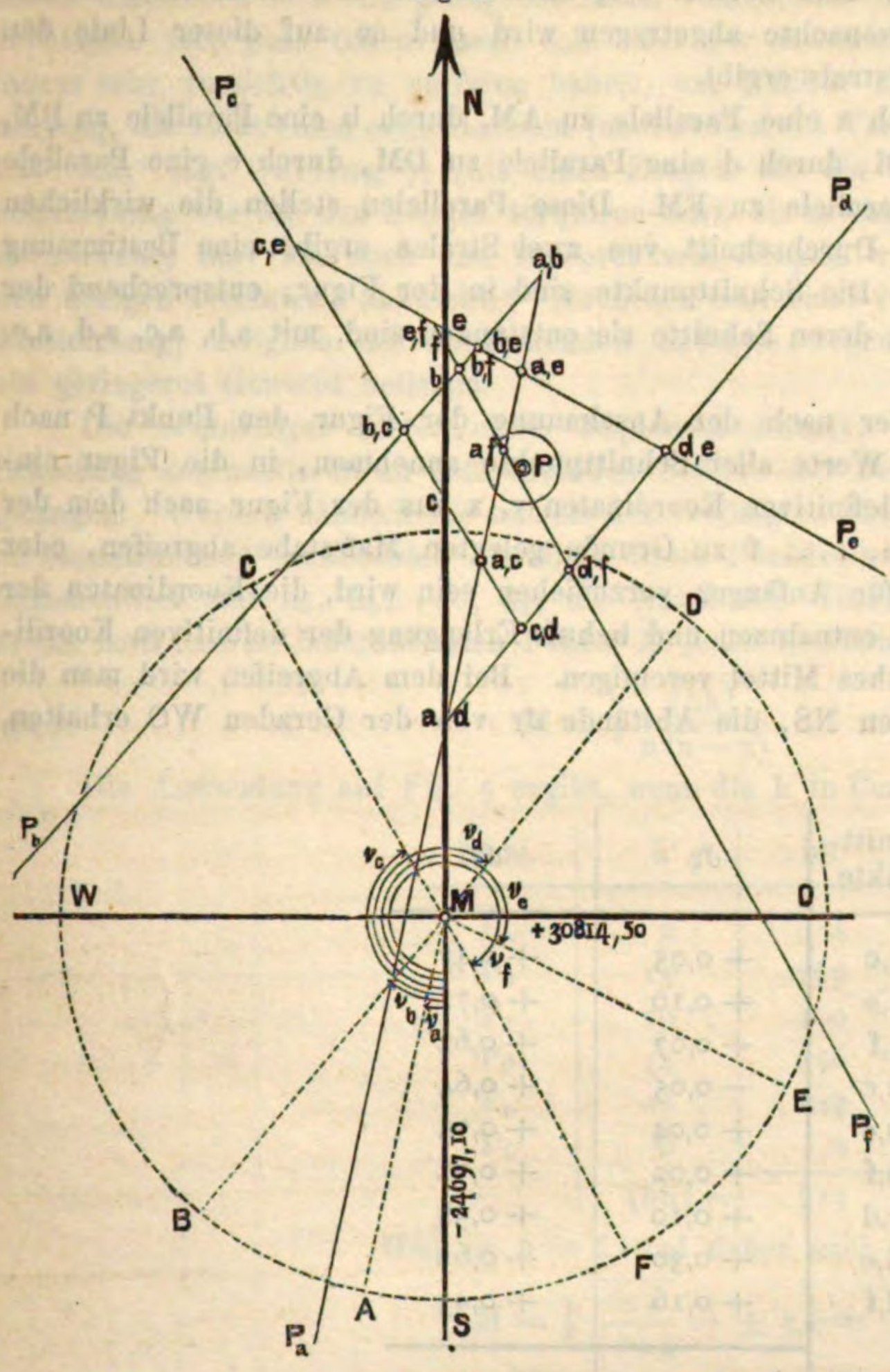
(1) $$\xi - x = (\eta - y)\operatorname{ctg}\mu,$$

(2) $$\xi = x + (\xi - x),$$

wo für y, x, μ der Reihe nach die Werte für die verschiedenen Stralen, nämlich für den Stral von P_a die Werte y_a, x_a, μ_a, für den Stral von P_b die Werte $y_b, x_b, \mu_b, \ldots$ einzusetzen sind. Die Rechnung ist in nachstehendem Formular ausgefürt:

Stral.	μ °	′	″				$\xi - x = (\eta - y)\,ctg\,\mu.$ $\xi = x + (\xi - x).$				
				η	—	24 697,10					
P_a	11	37	55	y	—	25 663,24	x	+	26 121,54	*log ctg* μ	0. 68 643
							$\xi - x$	+	4 693,22	*log* $(\eta - y)$	2. 98 504
				$\eta - y$	+	966,14	ξ	+	30 814,76	*log* $(\xi - x)$	3. 67 147
P_b	40	14	56	y	—	28 407,89	x	+	26 431,70	*log ctg* μ	0. 07 236
							$\xi - x$	+	4 383,50	*log* $(\eta - y)$	3. 56 946
				$\eta - y$	+	3 710,79	ξ	+	30 815,20	*log* $(\xi - x)$	3. 64 182
P_c	148	18	22	y	—	27 933,66	x	+	36 056,72	*log ctg* μ	0. 20 939n
							$\xi - x$	—	5 241,67	*log* $(\eta - y)$	3. 51 008
				$\eta - y$	+	3 236,56	ξ	+	30 815,05	*log* $(\xi - x)$	3. 71 947n
P_d	219	10	28	y	—	21 785,34	x	+	34 388,18	*log ctg* μ	0. 08 893
							$\xi - x$	—	3 573,42	*log* $(\eta - y)$	3. 46 415n
				$\eta - y$	—	2 911,76	ξ	+	30 814,76	*log* $(\xi - x)$	3. 55 308n
P_e	297	19	58	y	—	19 756,53	x	+	28 261,63	*log ctg* μ	9. 71 338n
							$\xi - x$	+	2 553,65	*log* $(\eta - y)$	3. 69 378n
				$\eta - y$	—	4 940,57	ξ	+	30 815,28	*log* $(\xi - x)$	3. 40 716
P_f	330	56	57	y	—	21 293,63	x	+	24 688,12	*log ctg* μ	0. 25 534n
							$\xi - x$	+	6 127,14	*log* $(\eta - y)$	3. 53 192n
				$\eta - y$	—	3 403,47	ξ	+	30 815,26	*log* $(\xi - x)$	3. 78 726

Fig. 5.



Jetzt konstruire man die Fig. 5. Man ziehe die Gerade NS als die in dem Abstande $y = -24\,697{,}10^{m}$ gedachte Parallele zur Abscissenachse und errichte auf derselben die Senkrechte WO, für welche mit Rücksicht auf die für r_a, r_b, ..., r_f gefundenen Zalenwerte der Abstand $r_o = +30\,814{,}50^{m}$ von der durch den Nullpunkt des Koordinatensistems gedachten Senkrechten zur Abscissenachse in abgerundeter Zal angenommen werden mag. Den Durchschnittspunkt M der Linien NS und WO nehme man zum Mittelpunkt eines mit dem Halbmesser 1 zu schlagenden Kreises und trage auf diesem, von dem südlichen Zweige der Linie NS ausgehend, etwa mit Hülfe einer Sehnentafel, in dem Halbmessermafse des Kreises die Neigungswinkel μ_a, μ_b, ..., μ_f ab*), für welche die Durchschnittspunkte ihrer Schenkel mit der Peripherie des Kreises mit A, B, ..., F bezeichnet sind. Dass die Neigungswinkel von dem südlichen Zweige der NS aus abgetragen werden, folgt aus dem Umstande, dass die $\measuredangle\measuredangle$ μ_a, μ_b, ..., μ_f für die Ausgangspunkte der nach P gefürten Stralen gelten, in P als dem Endpunkte dieser Stralen aber die Neigungswinkel $\mu_a \pm \pi$, $\mu_b \pm \pi$, ... sich ergeben würden.

Ferner trage man von M aus, und zwar, da in dem vorliegenden Beispiele die Abscissen und die Differenzen $r_a - r_o$, $r_b - r_o$, ..., $r_f - r_o$ positiv sind, also nach Norden wachsen, in der Richtung nach N hin auf SN diese Differenzen nach einem möglichst grofsen Mafsstabe, etwa 1 : 10, ab, wodurch man die Punkte a, b, c, d, e, f erhält, in welchen die bezüglichen, nach P gefürten Visirstralen die in dem Abstande y gedachte Parallele zur Abscissenachse schneiden. Dabei mag bemerkt werden, dass im Falle der Figur 5 die Durchschnittspunkte a und d zusammenfallen, da die Rechnung $r_a = r_d = +30\,814{,}76$ übereinstimmend ergeben hat.

Wenn die Neigung μ eines Visirstrals nahe 0° oder π oder 2π ist, also der Schnitt mit der Parallele NMS zur Abscissenachse sehr spitzwinklig ausfällt, kann der Fall eintreten, dass $r - r_o$ zu gross wird, um bei dem gegebenen Raume in der Figur von M aus auf NS abgetragen werden zu können. Dann berechne man die Hülfsgröfse

$$\Delta y = \frac{r_o - r}{\operatorname{ctg} \mu}, \tag{3}$$

*) In Figur 5 sind diese Winkel mit ν_a, ν_b, ..., ν_f bezeichnet.

welche, jenachdem sie positiv oder negativ ist, nach rechts oder nach links auf der Senkrechten WO zur Abscissenachse abgetragen wird und so auf dieser Linie den Durchschnittspunkt des Visirstrals ergibt.

Weiter ziehe man durch a eine Parallele zu AM, durch b eine Parallele zu BM, durch c eine Parallele zu CM, durch d eine Parallele zu DM, durch e eine Parallele zu EM und durch f eine Parallele zu FM. Diese Parallelen stellen die wirklichen Visirstralen dar, und jeder Durchschnitt von zwei Stralen ergibt eine Bestimmung für den gesuchten Punkt P. Die Schnittpunkte sind in der Figur, entsprechend der Bezeichnung der Stralen, aus deren Schnitte sie entstanden sind, mit a,b, a,c, a,d, a,e, a,f, b,c, ... bezeichnet.

Man kann nun entweder nach der Anschauung der Figur den Punkt P nach sachgemäfser Schätzung des Werts aller Schnittpunkte annehmen, in die Figur einzeichnen und danach seine definitiven Koordinaten y, x aus der Figur nach dem der Auftragung der Punkte a, b, ..., f zu Grunde gelegten Mafsstabe abgreifen, oder man kann, was namentlich für Anfänger vorzuziehen sein wird, die Koordinaten der Schnittpunkte aus der Figur entnehmen und behufs Erlangung der definitiven Koordinaten y, x in ein arithmetisches Mittel vereinigen. Bei dem Abgreifen wird man die Abstände $\delta\mathfrak{y}$ von der Geraden NS, die Abstände $\delta\mathfrak{x}$ von der Geraden WO erhalten, wie folgt:

Schnittpunkte	$\delta\mathfrak{y}$	$\delta\mathfrak{x}$
a,c	+ 0,05	+ 0,47
a,e	+ 0,10	+ 0,72
a,f	+ 0,07	+ 0,62
b,c	— 0,05	+ 0,64
b,e	+ 0,04	+ 0,75
b,f	+ 0,02	+ 0,72
c,d	+ 0,10	+ 0,38
d,e	+ 0,30	+ 0,62
d,f	+ 0,16	+ 0,45
Die algebraische Summe	+ 0,79	+ 5,37

fürt zu den Mittelwerten . . . . . $\frac{[\delta\mathfrak{y}]}{n} = \frac{+0{,}79}{9} = +0{,}09$

$\frac{[\delta\mathfrak{x}]}{n} = \frac{+5{,}37}{9} = +0{,}60,$

durch deren Zulegung zu . . . . . $\mathfrak{y} = -24\,697{,}10$

und $\mathfrak{x}_0 = +30\,814{,}50$

für P die definitiven Koordinaten . . . . . $y = -24\,697{,}01$

$x = +30\,815{,}10$

erhalten werden, nach welchen schliefslich, um die Figur zu vervollständigen, der Punkt P noch aufgetragen werden kann.

Sollte ein Visirstral, was aus der Figur sofort zu ersehen ist, sich von den Schnittpunkten der übrigen Stralen auffallend weit entfernen, so kann dadurch der Verdacht der Unzuverlässigkeit der Bestimmung dieses Strals begründet und Veranlassung gegeben werden, den Ursachen der Abweichung nachzuforschen. Nach dem Ergebnis der Untersuchung wird man zu entscheiden haben, ob man die Bestimmung des abweichenden Strals beibehalten, oder, nötigenfalls unter Widerholung der Winkelmessung, durch eine neue Bestimmung ersetzen, oder aber diesen Stral, weil

ausser demselben noch eine genügende Anzal von Stralen zur Bestimmung des Punktes P vorhanden ist, ganz fallen lassen soll. Bei der Ausscheidung des Strals wird man indess sehr vorsichtig zu verfaren haben, um Willkür zu vermeiden. „Jede Beobachtung, die nicht einen entschiedenen (nachweisbaren) Verdachtsgrund gegen sich hat, habe ich," sagt Gerling*), „als einen Zeugen für die Warheit zu betrachten, und ebensowenig wie ich den Zeugen torquiren darf, bis er sagt, was ich gesagt haben will, ebensowenig darf ich auch one Weiteres sein Zeugnis verwerfen, weil dasselbe von den übrigen bedeutend abweicht." Auch soll man einer von den übrigen abweichenden Bestimmung, lediglich des abweichenden Erfolges wegen, nicht etwa one Weiteres ein geringeres Gewicht beilegen.

Die Schnittfigur bietet einen bequemen Anhalt, um zu einer angenäherten Schätzung des mittleren zu befürchtenden Fehlers der Bestimmung des Punktes P zu gelangen. Werden nämlich die mittels des verjüngten Mafsstabes aus der Schnittfigur zu entnehmenden senkrechten Abstände dieses Punktes von den einzelnen Visirstralen beziehentlich mit h_a, h_b, ..., h_f, die Anzal der Visirstralen mit n bezeichnet, so erhält man den zu befürchtenden Fehler M jener Bestimmung aus:

$$M = \sqrt{\frac{[hh]}{n(n-2)}}. \qquad (4)$$

Die Anwendung auf Fig. 5 ergibt, wenn die h in Centimetern genommen werden:

Stral.	h	hh
P_a	2	4
P_b	13	169
P_c	10	100
P_d	14	196
P_e	12	144
P_f	0	0
	[hh] =	613

Hier ist $n = 6$, und daher nach (4):

$$M = \sqrt{\frac{613}{6 \times 4}} = \pm 5{,}1 \text{ cm}.$$

Wird nun in der Figur, widerum nach dem verjüngten Mafsstabe, mit M als Halbmesser um P als Mittelpunkt ein Kreis geschlagen, so wird durch Letzteren angenähert die Fläche bezeichnet, innerhalb welcher der wirkliche Punkt P liegen wird. Oder anders ausgedrückt, man wird, so weit aus den Abständen h ein Schluss auf die Genauigkeit der Bestimmung gezogen werden kann, im Allgemeinen nicht zu befürchten haben, dass der wirkliche Punkt P weiter als 5,1 cm von dem durch das Einschneiden erhaltenen Punkte P entfernt liegen wird.

In obigem Beispiele sind die Schnitte a,b, a,d, c,e und e,f der Fig. 5 ganz unberücksichtigt gelassen, weil bei denselben die bestimmenden Stralen sehr spitze Winkel bilden, die Schnitte daher nicht scharf ausfallen. Andererseits sind die wirklich benutzten Schnitte mit gleichem Gewichte in das arithmetische Mittel eingefürt worden. Wenn die brauchbaren Schnitte zalreich sind, wird dieses Verfaren die genügend sichere Bestimmung des Punktes P ermöglichen. Es wird aber auch ein Leichtes sein, einen Schritt weiter zu gehen und den Schnitten je nach der Gröfse des Schnittwinkels verschiedenes Gewicht beizulegen. Um hierbei zu einigermafsen festen Normen zu gelangen, zugleich aber auch sich von zu weit gehender Erschwerung der Rechnung fern zu halten, wird man im Allgemeinen sechs Klassen von Schnitten, nämlich un-

*) Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg und Gotha, 1843, Seite 68.

brauchbare, sehr schlechte, schlechte, mittlere, gute und sehr gute Schnitte unterscheiden und indem man die Klasse der unbrauchbaren Schnitte in ihrer Begrenzung gegen die Klasse der sehr schlechten Schnitte möglichst weit greift, ansehen können:

a) als unbrauchbare Schnitte (mit dem Gewicht 0) diejenigen, welche unter einem Winkel von 0° bis 15° (alter Teilung) erfolgen,
b) als sehr schlechte Schnitte (mit dem Gewicht 1) solche, deren Schnittwinkel zwischen 15° und 23° liegt,
c) als schlechte Schnitte (mit dem Gewicht 2) solche, deren Schnittwinkel zwischen 23° und 38° liegt,
d) als mittlere Schnitte (mit dem Gewicht 3) diejenigen, bei welchen der Schnittwinkel zwischen 38° und 54° beträgt,
e) als gute Schnitte (mit dem Gewicht 4) solche, deren Schnittwinkel zwischen 54° und 71° liegt,
f) als sehr gute Schnitte (mit dem Gewicht 5) endlich alle solche, welche unter einem Winkel von 71° bis 90° erfolgen.

Wird diese Klassifikation der Schnitte auch auf die übrigen drei Quadranten und zugleich auf die neue Winkelteilung ausgedehnt, so wird man für den Ansatz der Gewichte (p_w) aus der Beschaffenheit der Schnittwinkel das nachstehende Hülfstäfelchen erhalten:

Schnittklasse.	Gewicht p_w.	Alte Teilung. Schnittwinkel.				Neue Teilung. Schnittwinkel.				Gewicht p_w.	Schnittklasse.
Unbrauchbar	0	0°	180°	180°	360°	0°	200°	200°	400°	0	Unbrauchbar.
Sehr schlecht	1	15	165	195	345	17	183	217	383	1	Sehr schlecht.
Schlecht	2	23	157	203	337	25	175	225	375	2	Schlecht.
Mittel	3	38	142	218	322	42	158	242	358	3	Mittel.
Gut	4	54	126	234	306	60	140	260	340	4	Gut.
Sehr gut	5	71	109	251	289	79	121	279	321	5	Sehr gut.
		90	90	270	270	100	100	300	300		

Die Gröfse der Schnittwinkel wird aus den Neigungen μ sehr einfach erhalten, indem man die Neigung des einen der betreffenden beiden Stralen von der Neigung des anderen Strals subtrahirt. Wer sich hierbei eines graphischen Hülfsmittels bedienen will, wird ein solches leicht in der Weise herstellen können, dass er die Schnittwinkelklassen auf Glas, transparentes Papier o. dgl. m. zeichnet. Mit diesem sehr einfachen Instrument werden sich in der Schnittfigur die Schnittwinkel mit ausreichender Genauigkeit messen lassen.

Beim Vorhandensein von n Stralen, unter denen sich keine befinden, welche einander parallel sind, ist die Anzal der überhaupt möglichen Schnitte:

$$(5) \qquad \frac{n(n-1)}{2}.$$

2 Stralen geben 1 Schnitt,
3 „ „ 3 Schnitte,
4 „ „ 6 „ ,
5 „ „ 10 „ ,
6 „ „ 15 „ u. s. w.

Wird jene Klassifikation der Schnitte auf den Fall der Figur 5, welcher bei 6 Stralen 15 Schnitte ermöglicht, angewendet, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Schnitt-punkte.	Schnitt-winkel.	p_w.	δy.	δx.	$p_w \delta y$.	$p_w \delta x$.
a,b	29°	2	+ 0,13	+ 0,85	+ 0,26	+ 1,70
a,c	137	3	+ 0,05	+ 0,47	+ 0,15	+ 1,41
a,d	208	2	+ 0,00	+ 0,26	+ 0,00	+ 0,52
a,e	286	5	+ 0,10	+ 0,72	+ 0,50	+ 3,60
a,f	319	3	+ 0,07	+ 0,62	+ 0,21	+ 1,86
b,c	108	5	— 0,05	+ 0,64	— 0,25	+ 3,20
b,d	179	0	.	.	.	.
b,e	257	5	+ 0,04	+ 0,75	+ 0,20	+ 3,75
b,f	291	4	+ 0,02	+ 0,72	+ 0,08	+ 2,88
c,d	71	4	+ 0,10	+ 0,38	+ 0,40	+ 1,52
c,e	149	2	— 0,20	+ 0,88	— 0,40	+ 1,76
c,f	183	0	.	.	.	.
d,e	78	5	+ 0,30	+ 0,62	+ 1,50	+ 3,10
d,f	112	4	+ 0,16	+ 0,45	+ 0,64	+ 1,80
e,f	34	2	— 0,02	+ 0,78	— 0,04	+ 1,56
	Summe	46			+ 3,25	+28,66

Daraus ergibt sich . . . . . $\frac{[p_w \delta y]}{[p_w]} = \frac{+ 3{,}25}{46} = + 0{,}07$

$$\frac{[p_w \delta x]}{[p_w]} = \frac{+ 28{,}66}{46} = + 0{,}62$$

und durch Addition dieser Werte zu . . . . . $y = - 24\,697{,}10$

$x_o = + 30\,814{,}50$

$y = - 24\,697{,}03$

$x = + 30\,815{,}12.$

Für die Schätzung des mittleren Fehlers M der Bestimmung des Punktes P findet hier ebenfalls die Formel (4) Anwendung. Die Rechnung ergibt in diesem Falle:

Stral.	h.	hh.
P_a	1	1
P_b	10	100
P_c	10	100
P_d	17	289
P_e	11	121
P_f	1	1
	[hh] =	612

$$M = \sqrt{\frac{612}{6 \times 4}} = \pm 5{,}0^{cm},$$

das ist fast das gleiche Resultat, wie auf Seite 11.

In Vorstehendem ist der normale Fall betrachtet worden, in welchem sowol auf den gegebenen Punkten die Winkel β, als auch auf dem zu bestimmenden Punkte P zwischen allen von jenen Punkten nach P gefürten Stralen die Winkel α beobachtet worden sind und daher die für die Berechnung der x erforderlichen Neigungswinkel

μ durchweg aus den beiden Herleitungen φ und ψ gefunden wurden. In der Praxis werden aber auch noch andere Fälle vorkommen.

1. Es können zwar ebenfalls alle Winkel β beobachtet sein, aber auf dem Punkte P alle Winkel α fehlen. Dies ist der einfache Fall des Vorwärtseinschneidens, und es werden mit Hülfe der Winkel β nur die Neigungen φ abzuleiten und diese one Weiteres anstatt der Neigungen μ in die Rechnung einzufüren sein.

2. Es können abermals die Winkel β sämmtlich beobachtet, jedoch durch die Winkelbeobachtung auf P nur für einen Teil der nach demselben gefürten Stralen die Winkel α bestimmt sein. Dann wird man für sämmtliche Stralen die Neigungen φ, aber nur für diejenigen Stralen die Neigungen ψ erhalten, für welche die Winkel α gegeben sind. Nur für die letzteren Stralen lassen sich hier die Neigungen μ als arithmetische Mittel aus φ und ψ herleiten, wärend für die übrigen Stralen die Neigungen φ unmittelbar als μ benutzt werden müssen. Den mit diesen einseitig bestimmten Stralen gewonnenen Schnittpunkten wird man nicht dasselbe Gewicht beilegen können, wie den Schnitten der Stralen, für welche die Neigungen μ aus φ und ψ, also zweiseitig erhalten sind. Will man die Gewichtsverhältnisse in Zalen ausdrücken, so wird man von der Vorstellung ausgehen können, dass, wenn der Stral mit einseitig bestimmter Neigung als einfacher angesehen, ihm also das Gewicht 1 beigelegt wird, der Stral mit zweiseitig bestimmter Neigung als ein doppelter Stral mit dem Gewicht 2 zu gelten haben wird. Daraus folgt dann weiter, dass den Schnittpunkten

a) aus zwei doppelten Stralen das Gewicht 4,

b) aus einem doppelten und einem einfachen Stral das Gewicht 2,

c) aus zwei einfachen Stralen das Gewicht 1

beizulegen ist, und zwar ausser der Gewichtsverschiedenheit, welche nach Obigem wegen der Beschaffenheit der Schnittwinkel anzunehmen ist.

3. Es können zwar auf P für alle Stralen die Winkel α beobachtet sein, dagegen aber auf einzelnen der gegebenen Punkte die Winkel β fehlen. In diesem Falle wird man nur soweit, als die Winkel β vorhanden sind, die Neigungen φ, alsdann mit Hülfe aller Winkel α die vorläufigen Werte für ψ herleiten, nun aber allein für diejenigen n Stralen, welche zweiseitig beobachtet, für welche also die Neigungen φ und die vorläufigen Neigungen ψ bekannt sind, die Differenzen $\varphi - \psi$ bilden, hiermit die Verbesserung $o = \frac{[\varphi - \psi]}{n}$ berechnen und diese jetzt allen ψ, gleichviel, ob sie zweiseitig oder einseitig beobachteten Stralen angehören, beifügen. Endlich wird man für die zweiseitig bestimmten Stralen, wie bisher $\mu = \frac{\varphi + \psi}{2}$ erhalten, für die einseitigen Stralen aber ψ unmittelbar als μ annehmen. Hinsichtlich der Gewichte der Schnittbestimmungen aus den Stralen mit den verschiedenartigen Neigungen μ und ψ wird hier das zu 2 Gesagte analoge Anwendung finden können.

4. Wenn für einen Teil der Stralen die Winkel α und β, für einen anderen Teil nur die Winkel α, für einen dritten Teil nur die Winkel β gegeben sind, so wird, wie leicht ersichtlich, teils das Verfaren zu 3, teils dasjenige zu 2 anzuwenden sein, um die Neigungen φ, ψ, μ zu erhalten.

5. Wären nur die Winkel α, nicht aber die Winkel β beobachtet worden, so würde der Fall des Rückwärtseinschneidens vorliegen, welcher beim Vorhandensein von mehr als drei Stralen am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln ist, wie solches unten in den §§ 5 und 6 gezeigt wird.

Die Unterscheidung von einfachen und doppelten Stralen könnte zu der Folgerung füren, dass man solche Stralen, deren Neigung φ, wie oben bei dem von P_a ausgehenden Strale der Fall gewesen, doppelt bestimmt, und für welche ausserdem auch die Neigung ψ hergeleitet worden, in dem zu 2 erläuterten Sinne als dreifache Stralen mit dem Gewicht 3 ansehen müsse. Allein eine solche Konsequenz zu ziehen, wird

nicht am Platze sein, da dann für Stralen dieser Art der Neigung φ doppeltes Gewicht für die Herleitung von μ beizulegen wäre. Dies würde wiederum den Winkeln ψ beziehungsweise α gröfseren Zwang antun, als gerechtfertigt sein würde. Der Zwang könnte sogar, wenn man die Konsequenz weiter verfolgte, in dem Falle, wenn die Stralen nach dem gesuchten Punkte auf den gegebenen Punkten statt mit den Stralen nach je zwei gegebenen Punkten mit einer gröfseren Anzal von solchen durch Winkelbeobachtung in Verbindung gesetzt wäre, dahin füren, dass dann gegenüber den grofsen Gewichten der Neigungen φ die Neigungen ψ für die Ableitung der μ fast alle Bedeutung verlieren würden. Aus diesen und anderen Gründen wird man im Allgemeinen woltun, den Neigungen φ immer gleiches Gewicht mit ψ beizulegen, in Betreff der vorgedachten Stralenbeschaffenheit aber nur einseitig und zweiseitig bestimmte Stralen mit den Gewichten 1 und 2 zu unterscheiden. Sind alle Stralen einseitig, oder alle Stralen zweiseitig bestimmt, so fällt jeder Gewichtsansatz fort.

Die hier beschriebene Gattung der Stralengewichte werde mit t bezeichnet.

Daneben wird aber den Stralen noch aus anderer Veranlassung, und zwar wegen ihrer verschiedenen Länge, ebenfalls noch verschiedenes Gewicht beizulegen sein. Denn durch kurze Stralen wird der Schnittpunkt schärfer bestimmt werden, als durch lange Stralen, wie sich daraus ergibt, dass, wenn die Neigung eines kurzen und ebenso die Neigung eines langen Strals um einen kleinen Winkel gleichmäfsig geändert werden, der Endpunkt des kurzen Strals weniger verschoben wird, als derjenige des langen Strals. Die aus diesem Anlass den Stralen beizulegenden Gewichte sind umgekehrt proportional den Stralenlängen s, werden also als reziproke Werte $\frac{1}{s}$ der Letzteren aus der Tafel VI im Teil II der „Trigon. und polygon. Rechnungen“ gefunden.

Das Gesammtgewicht u jedes Strals ist gleich dem Produkte aus den Einzelgewichten t und $\frac{1}{s}$, also

$$u = \frac{t}{s}. \tag{6}$$

Haben nun zwei Stralen m und n die verschiedenen Gesammtgewichte u_m und u_n, so wird, soweit allein die Stralenbeschaffenheit in Betracht kommt, der Bestimmung des Schnittpunktes aus beiden Stralen das Gewicht

$$p_s = u_m u_n \tag{7}$$

beizulegen sein. Hierzu tritt noch das Gewicht p_w aus der Beschaffenheit des Schnittwinkels, so dass für die Bestimmung des Schnittpunktes schliefslich das Gesammtgewicht

$$p = p_w p_s = p_w u_m u_n \tag{8}$$

erhalten wird.

Die Stralenlängen s, welche zur Bestimmung des Gewichts $\frac{1}{s}$ gebraucht werden, sind aus den bisherigen Rechnungen nicht bekannt. Sie werden aber, da für den vorliegenden Zweck rohe Annäherung vollkommen ausreicht, aus einer Skizze des Triangulationsnetzes leicht gefunden. *)

Durch die Annahme verschiedener Gewichte für die Visirstralen wird, wie one Weiteres ersichtlich ist, in der Berechnung der r und in der Konstruktion der Schnittfigur, wie solche oben gezeigt worden, nichts geändert. In formeller Beziehung wird es jedoch zweckmäfsig sein, in der Figurenzeichnung die Gewichtsverhältnisse t der Stralen zur Anschauung zu bringen, etwa in der Weise, dass die doppelten Stralen

---

*) Für derartige Skizzen ist die Anwendung von Papier, welches mit einem Quadratnetze bedruckt ist, von grossem Vorteil. Die Fabrik von Carl Schleicher & Schüll in Düren (Rheinpreussen) liefert solches Papier, Projektir- oder Skizzirpapier genannt, in Millimeterteilung mit Unterscheidung der Zehner und Fünfer in zweckmäfsigster Beschaffenheit.

mit starken, die einfachen mit feineren Linien bezeichnet werden, um für diesen Gewichtsansatz ein übersichtliches Bild zu gewinnen.

Die vollständige Berücksichtigung der Gewichtsverhältnisse in dem Falle des obigen Beispiels fürt zu folgenden Ergebnissen:

Gewichte der Stralen.

Stral.	s.	$\frac{1}{s}$.	t.	$u = \frac{t}{s}$.
P_a	4790	21	2	21
P_b	5740	17	2	17
P_c	6160	16	2	16
P_d	4610	22	2	22
P_e	5560	18	2	18
P_f	7010	14	2	14

Da in diesem Falle sämmtliche $t = 2$ sind, ist $u = \frac{1}{s}$ gesetzt worden.

Schnitt-punkte.	Gewichte der Schnittpunkte.					δy.	δx.	$p\,\delta y$.	$p\,\delta x$.
	Schnitt-winkel.	p_w.	u_m.	u_n.	$p = p_w u_m u_n$.				
a,b	29°	2	21	17	7	+ 0,13	+ 0,85	+ 0,91	+ 5,95
a,c	137	3	21	16	10	+ 0,05	+ 0,47	+ 0,50	+ 4,70
a,d	208	2	21	22	9	+ 0,00	+ 0,26	+ 0,00	+ 2,34
a,e	286	5	21	18	19	+ 0,10	+ 0,72	+ 1,90	+ 13,68
a,f	319	3	21	14	9	+ 0,07	+ 0,62	+ 0,63	+ 5,58
b,c	108	5	17	16	14	− 0,05	+ 0,64	− 0,70	+ 8,96
b,d	179	0	.	.	.	.	.	.	.
b,e	257	5	17	18	15	+ 0,04	+ 0,75	+ 0,60	+ 11,25
b,f	291	4	17	14	10	+ 0,02	+ 0,72	+ 0,20	+ 7,20
c,d	71	4	16	22	14	+ 0,10	+ 0,38	+ 1,40	+ 5,32
c,e	149	2	16	18	6	− 0,20	+ 0,88	− 1,20	+ 5,28
c,f	183	0	.	.	.	.	.	.	.
d,e	78	5	22	18	20	+ 0,30	+ 0,62	+ 6,00	+ 12,40
d,f	112	4	22	14	12	+ 0,16	+ 0,45	+ 1,92	+ 5,40
e,f	34	2	18	14	5	− 0,02	+ 0,78	− 0,10	+ 3,90
				Summe	150			+ 12,06	+ 91,96

Daraus ergibt sich . . . . . $\frac{[p\delta y]}{[p]} = \frac{+ 12{,}06}{150} = +$ 0,08

$\frac{[p\delta x]}{[p]} = \frac{+ 91{,}96}{150} = +$ 0,61

und durch Addition dieser Werte zu . . . . . $y = - 24\,697{,}10$

$x_o = + 30\,814{,}50$

$y = - 24\,697{,}02$

$x = + 30\,815{,}11.$

Bei Entnahme der Werte $\frac{1}{s}$ aus der Reziprokentafel wird das Komma zweckmäfsig um so viele Stellen nach rechts gerückt, dass man höchstens zweistellige

ganze Zalen erhält. Eine gröfsere Genauigkeit als auf zwei Stellen ist in der Regel entbehrlich. In obigem Beispiele ist das Komma um fünf Stellen nach rechts gerückt.

Ferner ist es ausreichend, die Produkte $p = p_w u_m u_n$ im Allgemeinen höchstens in zweistelligen Zalen anzusetzen. Hier werden daher, wenn die Werte für $\frac{1}{s}$ zweistellig genommen waren, die beiden letzten Stellen abgestrichen werden können, wie auch vorstehend geschehen ist.

Beide Stellenveränderungen bleiben, vorausgesetzt dass sie durchweg gleichmäfsig erfolgen, ohne Einfluss auf das Schlussergebnis; da die Gewichte nur Verhältniszalen sind, welche sämmtlich mit der gleichen Zal multiplizirt oder dividirt werden dürfen.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers M dieser Bestimmung des Punktes P sind die Gewichte $u = \frac{t}{s}$ der Visirstralen zu berücksichtigen, weshalb hier die Formel (4) übergeht in:

(9) $$M = \sqrt{\frac{[uhh]}{(n-2)\,[u]}}.$$

Die Rechnung ergibt:

Stral.	u.	h.	hh.	uhh.
P_a	21	1	1	21
P_b	17	12	144	2448
P_c	16	10	100	1600
P_d	22	16	256	5632
P_e	18	11	121	2178
P_f	14	0	0	0
$[u] =$	108		$[uhh] =$	11879

$$M = \sqrt{\frac{11879}{4 \times 108}} = \pm 5{,}2^{\text{cm}}.$$

Diese letztere vollständige Berücksichtigung der Gewichte wird von dem sorgfältig arbeitenden Geometer wenigstens so lange rechnungsmäfsig ausgefürt werden, bis er eine gehörige Uebung darin erlangt hat, den Punkt P unter sachgemäfser Berücksichtigung aller Umstände nach Schätzung in die Schnittfigur einzuzeichnen.

§ 3.

Ist der gesuchte Punkt P durch drei Stralen bestimmt, so wird die fehlerzeigende Figur ein Dreieck sein, innerhalb dessen P liegen wird. In diesem besonderen Falle ist es vorzuziehen, P nicht aus den Koordinaten der Schnittpunkte, sondern in nachstehender Weise zu bestimmen.

Die drei Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks werden, je nachdem sie den von den Punkten P_a, P_b, P_c ausgehenden Stralen angehören, beziehentlich mit g_a, g_b, g_c, die senkrechten Abstände des Punktes P von diesen Seiten beziehentlich mit h_a, h_b, h_c bezeichnet. Die Stralenlängen seien in der bisherigen Bezeichnungsweise s_a, s_b, s_c, die Stralengewichte t_a, t_b, t_c. Die Längen der Dreiecksseiten g_a, g_b, g_c werden mittels des Mafsstabes aus der Figur entnommen. Die den Abständen h_a, h_b, h_c entsprechenden Aenderungen der Neigungswinkel μ_a, μ_b, μ_c der Stralen P_a, P_b, P_c seien v_a, v_b, v_c. Dann ist für v in Sekunden ausgedrückt:

(1) $$v_a = \varrho'' \frac{h_a}{s_a}, \qquad v_b = \varrho'' \frac{h_b}{s_b}, \qquad v_c = \varrho'' \frac{h_c}{s_c},$$

(2) $$h_a = \frac{v_a s_a}{\varrho''}, \qquad h_b = \frac{v_b s_b}{\varrho''}, \qquad h_c = \frac{v_c s_c}{\varrho''}.$$

Nun lässt sich der Punkt P innerhalb des fehlerzeigenden Dreiecks sehr leicht so finden, dass die Summe [vv] der Quadrate der Aenderungen v_a, v_b, v_c, wie es die Methode der kleinsten Quadrate erfordert, so klein als möglich werde. Dies geschieht, wenn durch die Punktbestimmung die Proportion:

(3) $$h_a : h_b : h_c = m_a : m_b : m_c$$

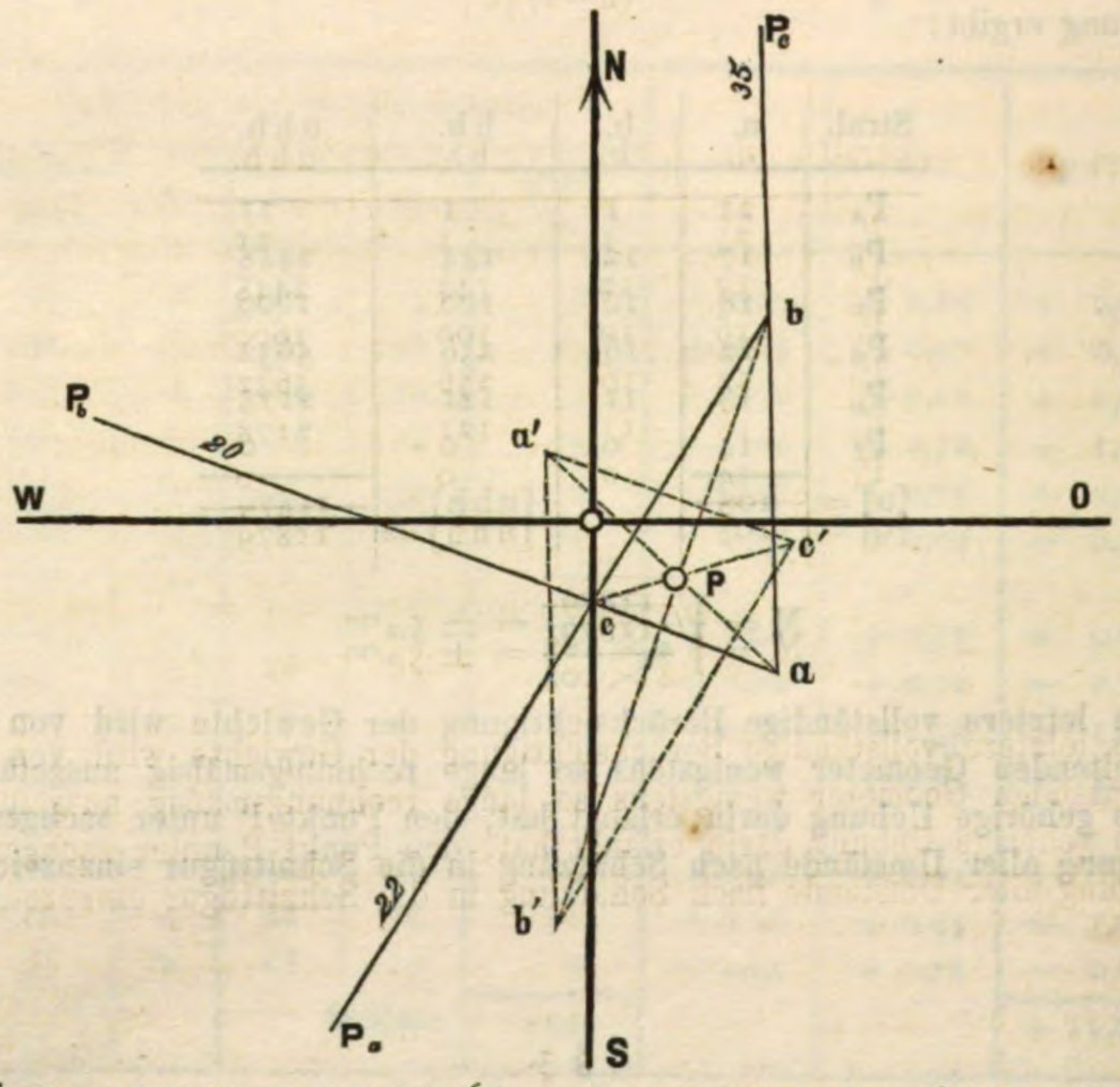
erfüllt wird, wo

(4) $$m_a = \frac{g_a s_a s_a}{t_a}, \qquad m_b = \frac{g_b s_b s_b}{t_b}, \qquad m_c = \frac{g_c s_c s_c}{t_c}$$

ist *).

In Fig. 6 ist abc das von den Stralen P_a, P_b, P_c gebildete fehlerzeigende Dreieck.

Fig. 6.



Ferner sei $g_a = 0{,}275^m$, $g_b = 0{,}16^m$, $g_c = 0{,}29^m$, $s_a = 890^m$, $s_b = 1580^m$, $s_c = 1100^m$, $t_a = 1$, $t_b = 2$, $t_c = 1$. Dann ist $m_a = \frac{0{,}275 \times 890 \times 890}{1} = 217\,828$, $m_b = \frac{0{,}16 \times 1580 \times 1580}{2} = 199\,712$, $m_c = \frac{0{,}29 \times 1100 \times 1100}{1} = 350\,900$, wofür durch gleichmäfsige Abstreichung der letzten 4 Stellen für den nachfolgenden Zweck genügend genau:

$$m_a = 22, \qquad m_b = 20, \qquad m_c = 35$$

gesetzt werden kann, welche Zalen in der Figur den betreffenden Stralen beigeschrieben sind.

---

*) Helmert, Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie, in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, 13. Jargang, 1868, Seite 91.

Man ziehe zu dem Stral P_a in dem Abstande $m_a = 22$ die Parallele $b'c'$, zu dem Stral P_b in dem Abstande $m_b = 20$ die Parallele $a'c'$, zu dem Stral P_c in dem Abstande $m_c = 35$ die Parallele $a'b'$, und zwar jedesmal an derjenigen Seite des betreffenden Strals, an welcher die dritte Ecke des fehlerzeigenden Dreiecks liegt. Die Mafse m_a, m_b, m_c können nach einem beliebigen Mafsstabe abgesetzt werden, da sie nur Verhältniszalen sind. Man wird hierdurch das dem $\triangle abc$ änliche $\triangle a'b'c'$ erhalten. Zieht man nun die Geraden aa', bb', cc', so werden sich dieselben in einem Punkte schneiden, und dieser ist der gesuchte Punkt P. Denn denkt man von a' einerseits eine Senkrechte auf ac, andererseits eine Senkrechte auf ab gefällt, so hat man, da diese Senkrechten zufolge der Konstruktion gleich m_b und m_c sind, die Proportion:

$$(5) \qquad aP : aa' = h_b : m_b = h_c : m_c.$$

Aenlich findet man:

$$(6) \qquad bP : bb' = h_a : m_a = h_c : m_c,$$

$$(7) \qquad cP : cc' = h_a : m_a = h_b : m_b.$$

Daraus folgt:

$$(8) \qquad h_a : m_a = h_b : m_b = h_c : m_c,$$

$$(9) \qquad h_a : h_b : h_c = m_a : m_b : m_c,$$

so dass also durch die Bestimmung des Punktes P die Proportion (3) erfüllt ist.

Indem die Abstände δy und δx von dem Achsenkreuz NS, WO nach dem der Schnittfigur abc zu Grunde liegenden verjüngten Mafsstab aus der Figur abgegriffen und zu y und x_o zugelegt werden, erhält man die gesuchten Koordinaten y und x für P.

Die Abstände h_a, h_b, h_c lassen sich auch durch Rechnung finden. F sei der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks abc, welcher sich nach der Figur aus Grundlinie und Höhe berechnen lässt. Alsdann hat man aus den Gleichungen:

$$(10) \qquad g_a h_a + g_b h_b + g_c h_c = F,$$

$$(11) \qquad h_a : h_b : h_c = m_a : m_b : m_c,$$

in denen F, g_a, g_b, g_c, m_a, m_b, m_c bekannte Grössen sind, die Unbekannten:

$$(12) \qquad h_a = m_a Q, \qquad h_b = m_b Q, \qquad h_c = m_c Q,$$

wo

$$(13) \qquad Q = \frac{F}{g_a m_a + g_b m_b + g_c m_c}.$$

Auch bei dieser Rechnung können die Zalenwerte für m_a, m_b, m_c vermöge ihrer Eigenschaft als Verhältniszalen um die gleiche Stellenzal gekürzt werden.

Werden nach dem verjüngten Mafsstabe, welcher der Schnittfigur abc zu Grunde liegt, in den Abständen h_a, h_b, h_c Parallelen zu den Stralen P_a, P_b, P_c gezogen, so werden sich diese in einem Punkte schneiden, welcher der gesuchte Punkt P ist. Endlich werden δy, δx wie oben aus der Schnittfigur entnommen.

Aus h_a, h_b, h_c können nach Formel (1) zugleich die Aenderungen v_a, v_b, v_c der Neigungswinkel μ_a, μ_b, μ_c gefunden werden, wobei h und dem zufolge auch v positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem P, von dem Stralenausgangspunkte P_a, P_b, P_c aus nach P gesehen, rechts oder links des betreffenden Strals liegt.

Da hiernach, mag nun der Punkt P mittels des änlichen Dreiecks $a'b'c'$ oder mittels der berechneten Abstände h_a, h_b, h_c gefunden werden, den Anforderungen der Methode der kleinsten Quadrate one Mehraufwand an Zeit und Arbeit genügt werden kann, so wird im Falle des Vorhandenseins von nur drei Stralen jederzeit dem hier beschriebenen Verfaren der Bestimmung des Punktes P der Vorzug vor dem Verfaren des § 2 zu geben sein, vorausgesetzt, dass das fehlerzeigende Dreieck nach der Gröfse der Schnittwinkel nicht so stumpfwinklig ist, um nicht konstruirt werden zu können.

§ 4.

Nachdem das Verfaren der graphischen Punktenbestimmung durch „Einschneiden“ in seinen Grundzügen dargelegt worden, wird es nützlich sein, die praktische Anwendung und Ausfürung der Rechnung der näheren Betrachtung zu unterziehen und an einigen Beispielen im Zusammenhange zu erläutern.

In den nachstehenden Berechnungen sind die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 durch ihre rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Von den neu zu bestimmenden Punkten P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, ... sind die Rechnungen für die ersten drei Punkte vollständig nachgewiesen.

Die Beispiele ergeben zugleich, wie das Rechenformular eingerichtet und benutzt werden kann. Die Schnittfiguren haben wegen der Schwierigkeit ihrer Herstellung für den Drucksatz nicht mit aufgenommen werden können. In der praktischen Ausfürung selbst wird aber auch für diese mit Nutzen ein vorgedrucktes Schema verwendet, welches das Achsenkreuz NS, WO, sowie den Kreis, und zwar diesen mit einer die Benutzung der Sehnen entbehrlich machenden Gradeinteilung versehen, endlich auch einen Millimetermafsstab enthält. *)

Auch die Karte des berechneten Netzteils hat aus typographischen Rücksichten keine Aufnahme finden können, wird sich jedoch aus den in der Rechnung vorkommenden rechtwinkligen Koordinaten u. s. w. unschwer skizziren lassen.

Lauf. No. 1. *Punkt P:* 1.

7. Berechnung der definitiven Neigungen. | $y = \pm$ 0,00 $x = \pm$ 0,00

nach dem Punkte	P_6	P_4	P_5		
y_n	+ 696,15	−5 029,23	−1 604,61		
x_n	+7 443,10	+2 302,57	+5 178,57		
$y_n - y$	+ 696,15	−5 029,23	−1 604,61		
$x_n - x$	+7 443,10	+2 302,57	+5 178,57		
$log\,(y_n - y)$	2. 84 270	3. 70 150$_n$	3. 20 537$_n$		
$log\,(x_n - x)$	3. 87 176	3. 36 221	3. 71 421		
$log\,tg\,\nu_n$	8. 97 094	0. 33 929$_n$	9. 49 116$_n$		

8. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

P_n.	ν_n. ° ′ ″	α_n. ° ′ ″	$\nu_0 + \alpha_n$. ° ′ ″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. + ″	− ″	φ. ° ′ ″
P_6	5 20 35	70 44 37	5 20 37	.	2	
P_{12}	. . .	95 7 34	29 43 34	.	.	29 43 32
P_8	. . .	357 59 4	292 35 4	.	.	292 35 2
P_4	294 36 0	0 0 0	294 36 0	.	0	
P_{10}	. . .	3 39 23	298 15 23	.	.	298 15 21
P_5	342 47 3	48 11 7	342 47 7	.	4	
P_9	. . .	56 32 47	351 8 47	.	.	351 8 45
				.	6	
			$0 = \frac{-6}{3} =$	.	2	.

*) Zum schnellen Ablesen der Abstände δ_2, δ_9 dient zweckmäfsig ein Mafsstab auf Glas u. dgl. m.

Lauf. No. 2. *Punkt P: 2.*

7. Berechnung der definitiven Neigungen.	$y = -1\,165{,}70$ $x = -4\,288{,}26$

nach dem Punkte	P_1.	P_3.	P_4.		
y_n	± 0,00	− 3 825,29	− 5 029,23		
x_n	± 0,00	− 3 269,73	+ 2 302,57		
$y_n - y$	+ 1 165,70	− 2 659,59	− 3 863,53		
$x_n - x$	+ 4 288,26	+ 1 018,53	+ 6 590,83		
$log\,(y_n - y)$	3. 06 659	3. 42 481n	3. 58 698n		
$log\,(x_n - x)$	3. 63 228	3. 00 797	3. 81 894		
$log\,tg\,\nu_n$	9. 43 431	0. 41 684n	9. 76 804n		

8. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

P_n.	ν_n. ° ′ ″	α_n. ° ′ ″	$\nu_0 + \alpha_n$ ° ′ ″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. + ″	− ″	φ. ° ′ ″
P_1	15 12 28	84 15 7	15 12 26	2	.	
P_3	290 57 19	0 0 0	290 57 19	0	.	
P_4	329 37 17	38 39 53	329 37 12	5	.	
P_8	. . .	57 16 20	348 13 39	.	.	348 13 41
				7	.	
			$0 = \frac{+7}{3} =$	2	.	

Lauf. No. 3. *Punkt P: 4.*

7. Berechnung der definitiven Neigungen.	$y = -5\,029{,}23$ $x = +2\,302{,}57$

nach dem Punkte	P_5.	P_1.
y_n	− 1 604,61	Bereits
x_n	+ 5 178,57	auf P_1
$y_n - y$	+ 3 424,62	berechnet.
$x_n - x$	+ 2 876,00	
$log\,(y_n - y)$	3. 53 461	
$log\,(x_n - x)$	3. 45 879	
$log\,tg\,\nu_n$	0. 07 582	

8. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

P_n.	ν_n. ° ′ ″	α_n. ° ′ ″	$\nu_0 + \alpha_n$. ° ′ ″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. + ″	− ″	φ. ° ′ ″
P_5	49 58 35	0 0 0	49 58 35	0	.	. . .
P_1	114 36 0	64 37 24	114 35 59	1	.	. . .
P_8	. . .	66 12 50	116 11 25	.	.	116 11 25
				1	.	
			$0 = \frac{+1}{1} =$	0	.	

Lauf. No. 4. *Punkt P: 5.*

7. *Berechnung der definitiven Neigungen.*				$y = -1\,604{,}61$ $x = +5\,178{,}57$	
nach dem Punkte	P_6.	P_1.	P_4.		
y_n x_n	+ 696,15 + 7 443,10	Bereits auf P_1	Bereits auf P_4		
$y_n - y$ $x_n - x$	+ 2 300,76 + 2 264,53	berechnet.	berechnet.		
$log\,(y_n - y)$ $log\,(x_n - x)$ $log\,tg\,\nu_n$	3. 36 187 3. 35 498 0. 00 689				

8. *Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.*

P_n.	ν_n.			α_n.			$\nu_0 + \alpha_n$.			$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. +	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. −	φ.		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	″	″	°	′	″
P_6	45	27	17	0	0	0	45	27	17	.	0	.	.	.
P_{11}	.	.	.	45	8	14	90	35	31	.	.	90	35	30
P_9	.	.	.	96	54	25	142	21	42	.	.	142	21	41
P_1	162	47	3	117	19	48	162	47	5	.	2	.	.	.
P_8	.	.	.	143	15	35	188	42	52	.	.	188	42	51
P_{10}	.	.	.	177	40	42	223	7	59	.	.	223	7	58
P_4	229	58	35	184	31	19	229	58	36	.	1	.	.	.
										.	3			
							$0 = \frac{-3}{3} =$			.	1			

Lauf. No. 5. *Punkt P: 6.*

7. *Berechnung der definitiven Neigungen.*				$y = +\ 696{,}15$ $x = +7\,443{,}10$	
nach dem Punkte	P_7.	P_1.	P_5.	P_4.	
y_n x_n	+ 4 332,89 + 4 359,78	Bereits auf P_1	Bereits auf P_5	− 5 029,23 + 2 302,57	
$y_n - y$ $x_n - x$	+ 3 636,74 − 3 083,32	berechnet.	berechnet.	− 5 725,38 − 5 140,53	
$log\,(y_n - y)$ $log\,(x_n - x)$ $log\,tg\,\nu_n$	3. 56 071 3. 48 901$_n$ 0. 07 170$_n$			3. 75 781$_n$ 3. 71 101$_n$ 0. 04 680	

8. *Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.*

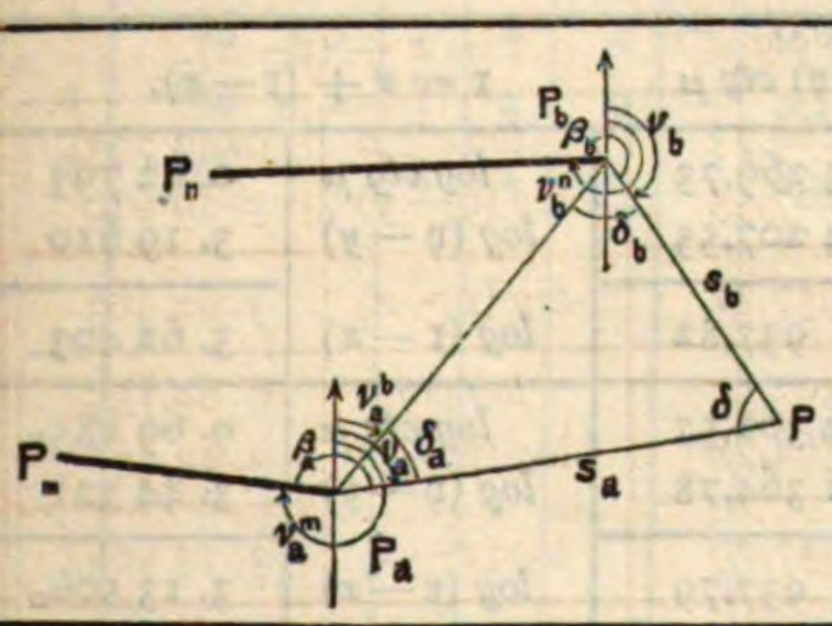
P_n.	ν_n.			α_n.			$\nu_0 + \alpha_n$.			$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. +	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. −	φ.		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	″	″	°	′	″
.	.	.	.	0	0	0	104	41	55	.	.	.	.	.
P_7	130	17	30	25	35	35	130	17	30	0	.	.	.	.
P_{12}	.	.	.	58	11	28	162	53	23	.	.	162	53	31
P_{11}	.	.	.	77	45	54	182	27	49	.	.	182	27	57
P_1	185	20	35	80	38	34	185	20	29	6	.	.	.	.
P_9	.	.	.	95	22	5	200	4	0	.	.	200	4	8
P_{10}	.	.	.	119	28	55	224	10	50	.	.	224	10	58
P_5	225	27	17	120	45	8	225	27	3	14	.	.	.	.
P_4	228	4	53	123	22	45	228	4	40	13	.	.	.	.
										33	.			
							$0 = \frac{+33}{4} =$			8	.			

Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der durch Einschneiden bestimmten Punkte mit Hülfe graphischer Darstellung der Schnittpunkte.

Lauf. No. 6.

Zu bestimmender Punkt P: 8.

2. *Berechnung der genäherten Koordinaten aus dem Schnitte zweier Visirstralen.*



$$tg\,\nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}. \qquad m = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta \sin\nu_a^b}.$$

$$\begin{aligned} \eta &= y_a + \Delta y_a. \\ &= y_b + \Delta y_b. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \xi &= x_a + \Delta x_a. \\ &= x_b + \Delta x_b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y_a &= m \sin\delta_b \sin\nu_a. \\ \Delta x_a &= m \sin\delta_b \cos\nu_a. \\ \Delta y_b &= m \sin\delta_a \sin\nu_b. \\ \Delta x_b &= m \sin\delta_a \cos\nu_b. \end{aligned}$$

Probe: $\Delta y_a - \Delta y_b = y_b - y_a.$
$\Delta x_a - \Delta x_b = x_b - x_a.$

	P_a : 4. ° ′ ″	±		P_b : 5. ±				
		y_a	— 5 029,23	x_a	+ 2 302,57	*log sin* ν_a	9. 95 295
		y_b	— 1 604,61	x_b	+ 5 178,57	*log m*	3. 67 104
ν_a	116 11 28	$y_b - y_a$	+ 3 424,62	$x_b - x_a$	+ 2 876,00	*log sin* δ_b	9. 81 922
ν_b	188 42 50		− 3		+ 2		
		Δy_a	+ 2 774,67	Δx_a	− 1 364,78	*log cos* ν_a	9. 64 480n
ν_a^b	49 58 35				− 6		
		Δy_b	− 649,98	Δx_b	− 4 240,70	*log* Δy_a	3. 44 321
$\delta_a = \nu_a - \nu_a^b$	66 12 53	η	− 2 254,59	ξ	+ 937,81	*log* Δx_a	3. 13 506n
$\delta_b = \nu_a^b - \nu_b \pm \pi$	41 15 45	*log* $(y_b - y_a)$		3. 53 461	*log sin* ν_b	9. 18 041n	
$\delta = \nu_b - \nu_a$	72 31 22	− *log* $(x_b - x_a)$		3. 45 879	*log m*	3. 67 104	
$\delta_a + \delta_b + \delta$	*180 0 0*	*log tg* ν_a^b		0. 07 582	*log sin* δ_a	9. 96 145	
		log $(y_b - y_a)$		3. 53 461	*log cos* ν_b	9. 99 495n	
		cpl log sin δ		0. 02 053	*log* Δy_b	2. 81 290n	
		cpl log sin ν_a^b		0. 11 590	*log* Δx_b	3. 62 744n	
		log m		3. 67 104			

Zu bestimmender

Stral.	*1. Ableitung der Neigungen μ der Visirstralen aus den Winkelbeobachtungen.*															*3. Stralengewichte.*			
	φ.			α.			ψ.			$\varphi-\psi$		$\mu=\frac{\varphi+\psi}{2}$.				s.	$\frac{1}{s}$.	t.	u.
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	+ ″	− ″	°	′	″					
P_3	.	.	.	264	16	46	20	+ 28	5 11	.	.	20	28	16		4490	22	1	2
P_4	116	11	25	0	0	0	116	+ 11	5 25	0	.	116	11	28		3090	32	2	6
P_5	188	42	51	72	31	18	188	+ 42	5 43	8	.	188	42	50		4290	23	2	5
P_6	.	.	.	88	12	24	204	+ 23	5 49	.	.	204	23	54		7140	14	1	1
P_1	292	35	2	176	23	31	292	+ 34	5 56	6	.	292	35	2		2440	41	2	8
P_2	348	13	41	.	.	.	.	.	.	.	.	348	13	41		5340	19	1	2
										14	.								24
							$0=\frac{+14}{3}=$			5	.				$u=\frac{t}{s}$.				

4. Berechnung der Achsenabstände ϰ.

	η	—	2 254,59	$\varkappa-x=(\eta-y)\,ctg\,\mu$			$\varkappa=x+(\varkappa-x)$.	
P_3	y	—	3 825,29	x	—	3 269,73	*log ctg μ*	0. 42 793
				$\varkappa-x$	+	4 207,55	*log* $(\eta-y)$	3. 19 610
	$\eta-y$	+	1 570,70	$\varkappa$	+	937,82	*log* $(\varkappa-x)$	3. 62 403
P_4	y	—	5 029,23	x	+	2 302,57	*log ctg μ*	9. 69 185n
				$\varkappa-x$	−	1 364,78	*log* $(\eta-y)$	3. 44 321
	$\eta-y$	+	2 774,64	$\varkappa$	+	937,79	*log* $(\varkappa-x)$	3. 13 506n
P_5	y	—	1 604,61	x	+	5 178,57	*log ctg μ*	0. 81 454
				$\varkappa-x$	−	4 240,70	*log* $(\eta-y)$	2. 81 290n
	$\eta-y$	—	649,98	$\varkappa$	+	937,87	*log* $(\varkappa-x)$	3. 62 744n
P_6	y	+	696,15	x	+	7 443,10	*log ctg μ*	0. 34 334
				$\varkappa-x$	−	6 505,33	*log* $(\eta-y)$	3. 46 993n
	$\eta-y$	—	2 950,74	$\varkappa$	+	937,77	*log* $(\varkappa-x)$	3. 81 327n
P_1	y	±	0,00	x	±	0,00	*log ctg μ*	9. 61 902n
				$\varkappa-x$	+	937,76	*log* $(\eta-y)$	3. 35 307n
	$\eta-y$	—	2 254,59	$\varkappa$	+	937,76	*log* $(\varkappa-x)$	2. 97 209
P_2	y	—	1 165,70	x	—	4 288,26	*log ctg μ*	0. 68 110n
				$\varkappa-x$	+	5 225,00	*log* $(\eta-y)$	3. 03 699n
	$\eta-y$	—	1 088,89	$\varkappa$	+	936,74	*log* $(\varkappa-x)$	3. 71 809
P_2	y			$\varkappa_0$	+	937,80	*log ctg μ*	
	$\Delta\eta$	—	0,22	$\varkappa_0-\varkappa$	+	1,06	*log* $(\varkappa_0-\varkappa)$	0. 02 531
	$\eta-y$			$\varkappa$			*log* $\Delta\eta$	9. 34 421n

Punkt P : 8.

Schnitt-punkte.		*5. Berechnung der definitiven Koordinaten y, x.*													*6. Mittlerer Fehler.*		
		Gewichte d. Schnittpunkte.					δy.		δx.		$p \cdot \delta y$.		$p \cdot \delta x$.		*h.*	*hh.*	*uhh.*
		Winkel. °	p_w.	u_m.	u_n.	*p.*	±		±		±		±				
3	4	96	5	2	6	6	—	0,01	±	0,00	—	0,06	±	0,00	3	9	18
3	5	168	0	.	.	.		.		.		.		.			
3	6	184	0	.	.	.		.		.		.		.			
3	1	272	5	2	8	8	—	0,02	—	0,03	—	0,16	—	0,24			
3	2	328	2	2	2	1	—	0,14	—	0,37	—	0,14	—	0,37			
4	5	73	5	6	5	15	—	0,01	±	0,00	—	0,15	±	0,00	3	9	54
4	6	88	5	6	1	3	±	0,00	—	0,01	±	0,00	—	0,03			
4	1	176	0	.	.	.		.		.		.		.			
4	2	232	3	6	2	4	—	0,24	+	0,11	—	0,96	+	0,44			
5	6	16	1	5	1	1	—	0,02	—	0,08	—	0,02	—	0,08	3	9	45
5	1	104	5	5	8	20	—	0,02	—	0,04	—	0,40	—	0,80			
5	2	160	1	5	2	1	—	0,10	—	0,59	—	0,10	—	0,59			
6	1	88	5	1	8	4	—	0,01	—	0,04	—	0,04	—	0,16	5	25	25
6	2	144	2	1	2	0	—	0,15	—	0,36	—	0,00	—	0,00			
1	2	56	4	8	2	6	—	0,23	+	0,06	—	1,38	+	0,36	0	0	0
															17	289	578
						$p = p_w u_m u_n$.		[p]	69		+	0,00	+	0,80		[uhh]	720
											—	3,41	—	2,27			
							$[p\,\delta y]$ und $[p\,\delta x]$				—	3,41	—	1,47	$M = \sqrt{\frac{[uhh]}{(n-2)\,[u]}}$.		
							$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$ und $\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$				—	0,05	—	0,02			
		y	—	2 254,59			x_0		+	937,80					$= \sqrt{\frac{720}{4 \times 24}}$		
		$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$	—	0,05			$\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$		—	0,02							
		y	—	2 254,64			x		+	937,78					$= \pm 0{,}027^{m}$.		

Punkt P : 8.

7. Berechnung der definitiven Neigungen ν.					$y = -2254{,}64$ $x = +937{,}78$	
nach dem Punkte	P_3.	P_4.	P_5.	P_6.	P_1.	P_2.
y_n	−3 825,29	−5 029,23	−1 604,61	+ 696,15	± 0,00	−1 165,70
x_n	−3 269,73	+2 302,57	+5 178,57	+7 443,10	± 0,00	−4 288,26
$y_n - y$	−1 570,65	−2 774,59	+ 650,03	+2 950,79	+2 254,64	+1 088,94
$x_n - x$	−4 207,51	+1 364,79	+4 240,79	+6 505,32	− 937,78	−5 226,04
$\log(y_n - y)$	3. 19 608n	3. 44 320n	2. 81 293	3. 46 994	3. 35 308	3. 03 701
$\log(x_n - x)$	3. 62 403n	3. 13 506	3. 62 745	3. 81 327	2. 97 210n	3. 71 817n
$\log tg\, \nu_n$	9. 57 205	0. 30 814n	9. 18 548	9. 65 667	0. 38 098n	9. 31 884n

8. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

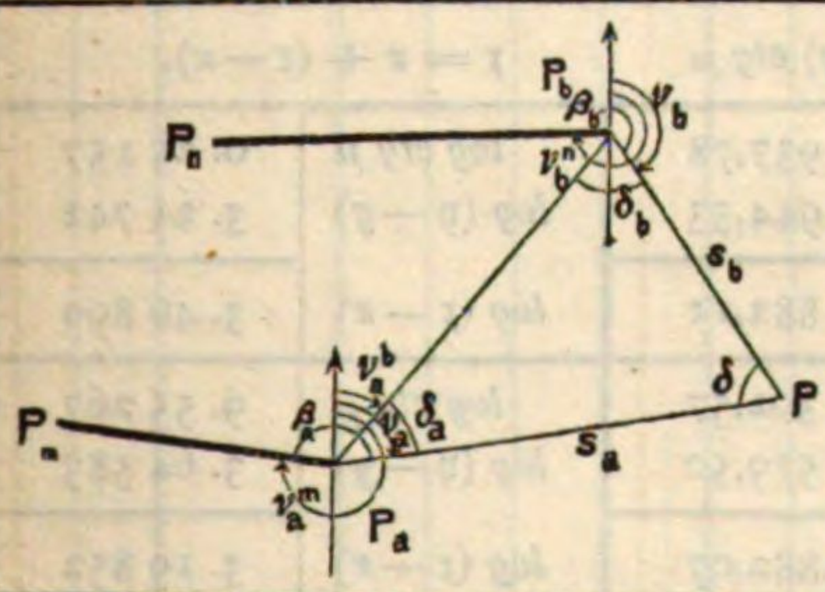
P_n.	ν_n. °	′	″	α_n. °	′	″	$\nu_0 + \alpha_n$. °	′	″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. + ″	− ″	φ. °	′	″
P_3	200	28	13	264	16	46	200	28	16	.	3	.	.	.
P_4	296	11	30	0	0	0	296	11	30	.	0	.	.	.
P_{10}	.	.	.	7	42	5	303	53	35	.	.	303	53	36
P_5	8	42	52	72	31	18	8	42	48	4	.	.	.	.
P_6	24	23	56	88	12	24	24	23	54	2	.	.	.	.
P_9	.	.	.	93	4	10	29	15	40	.	.	29	15	41
P_{11}	.	.	.	97	52	22	34	3	52	.	.	34	3	53
P_{12}	.	.	.	123	24	26	59	35	56	.	.	59	35	57
P_1	112	35	2	176	23	31	112	35	1	1	.	.	.	.
P_2	168	13	47	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
										7	3			
										4				
							$0 = \frac{+4}{5} =$			1				

Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der durch Einschneiden bestimmten Punkte mit Hülfe graphischer Darstellung der Schnittpunkte.

Lauf. No. 7.

Zu bestimmender Punkt P: 9.

2. *Berechnung der genäherten Koordinaten aus dem Schnitte zweier Visirstralen.*



$$tg\, \nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}. \qquad m = \frac{y_b - y_a}{\sin \delta \sin \nu_a^b}.$$

$\eta = y_a + \Delta y_a.$ $= y_b + \Delta y_b.$	$\xi = x_a + \Delta x_a.$ $= x_b + \Delta x_b.$	$\Delta y_a = m \sin \delta_b \sin \nu_a.$ $\Delta x_a = m \sin \delta_b \cos \nu_a.$ $\Delta y_b = m \sin \delta_a \sin \nu_b.$ $\Delta x_b = m \sin \delta_a \cos \nu_b.$

Probe: $\Delta y_a - \Delta y_b = y_b - y_a.$ $\Delta x_a - \Delta x_b = x_b - x_a.$

	P_a: 8. ° ′ ″			±		P_b: 5. ±				
				y_a	— 2 254,64	x_a	+ 937,78	*log sin* ν_a	9. 68 913
				y_b	— 1 604,61	x_b	+ 5 178,57	*log m*	3. 66 879
ν_a	29	15	43	$y_b - y_a$	+ 650,03	$x_b - x_a$	+ 4 240,79	*log sin* δ_b	9. 85 950
ν_b	142	21	42		+ 1				
				Δy_a	+ 1 649,77	Δx_a	+ 2 944,40	*log cos* ν_a	9. 94 071
ν_a^b	8	42	52	Δy_b	+ 999,75	Δx_b	— 1 296,39	*log* Δy_a	3. 21 742
$\delta_a = \nu_a - \nu_a^b$	20	32	51	η	— 604,86	ξ	+ 3 882,18	*log* Δx_a	3. 46 900
$\delta_b = \nu_a^b - \nu_b \pm \pi$	46	21	10	*log* $(y_b - y_a)$		2. 81 293		*log sin* ν_b	9. 78 581
$\delta = \nu_b - \nu_a$	113	5	59	— *log* $(x_b - x_a)$		3. 62 745		*log m*	3. 66 879
$\delta_a + \delta_b + \delta$	*180*	*0*	*0*	*log tg* ν_a^b		9. 18 548		*log sin* δ_a	9. 54 529
				log $(y_b - y_a)$		2. 81 293		*log cos* ν_b	9. 89 866$_n$
				cpl log sin δ		0. 03 630		*log* Δy_b	2. 99 989
				cpl log sin ν_a^b		0. 81 956		*log* Δx_b	3. 11 274$_n$
				log m		3. 66 879			

Zu bestimmender

Stral.	1. Ableitung der Neigungen μ der Visirstralen aus den Winkelbeobachtungen.																3. Stralengewichte.			
	φ.			α.			ψ.			$\varphi-\psi$ +	$\varphi-\psi$ −	$\mu=\frac{\varphi+\psi}{2}$.				s.	$\frac{1}{s}$.	l.	u.
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	″	″	°	′	″						
P_8	29	15	41	318	54	33	29	+ 15	3 42	.	1	29	15	43			3380	30	2	6
P_4	.	.	.	0	0	0	70	+ 21	3 9	.	.	70	21	12			4700	21	1	2
P_5	142	21	41	72	0	32	142	+ 21	3 41	.	0	142	21	42			1640	61	2	12
P_6	200	4	8	129	42	56	200	+ 4	3 5	3	.	200	4	8			3790	26	2	5
P_1	351	8	45	280	47	26	351	+ 8	3 35	10	.	351	8	42			3930	25	2	5
										12	.									
							$0=\frac{+12}{4}=$			3	.				$u=\frac{t}{s}$.				[u]	30

4. Berechnung der Achsenabstände $\mathfrak{x}$.

	$\mathfrak{y}$	—	604,86	$\mathfrak{x}-x=(\mathfrak{y}-y)\,ctg\,\mu$			$\mathfrak{x}=x+(\mathfrak{x}-x)$.	
P_8	y	—	2 254,64	x	+	937,78	*log ctg* μ	0. 25 157
				$\mathfrak{x}-x$	+	2 944,33	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 21 742
	$\mathfrak{y}-y$	+	1 649,78	$\mathfrak{x}$	+	3 882,11	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 46 899
P_4	y	—	5 029,23	x	+	2 302,57	*log ctg* μ	9. 55 267
				$\mathfrak{x}-x$	+	1 579,50	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 64 585
	$\mathfrak{y}-y$	+	4 424,37	$\mathfrak{x}$	+	3 882,07	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 19 852
P_5	y	—	1 604,61	x	+	5 178,57	*log ctg* μ	0. 11 285n
				$\mathfrak{x}-x$	−	1 296,39	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	2. 99 989
	$\mathfrak{y}-y$	+	999,75	$\mathfrak{x}$	+	3 882,18	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 11 274n
P_6	y	+	696,15	x	+	7 443,10	*log ctg* μ	0. 43 731
				$\mathfrak{x}-x$	−	3 561,17	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 11 428n
	$\mathfrak{y}-y$	−	1 301,01	$\mathfrak{x}$	+	3 881,93	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 55 159n
P_1	y	±	0,00	x	±	0,00	*log ctg* μ	0. 80 746n
				$\mathfrak{x}-x$	+	3 882,45	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	2. 78 165n
	$\mathfrak{y}-y$	−	604,86	$\mathfrak{x}$	+	3 882,45	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 58 911

Punkt P : 9.

Schnitt-punkte.		*5. Berechnung der definitiven Koordinaten y, x.*													*6. Mittlerer Fehler.*		
		Gewichte d. Schnittpunkte.					δy.		δx.		$p\,\delta y$.		$p\,\delta x$.		*h.*	*hh.*	*uhh.*
		Winkel. °	p_w.	u_m.	u_n.	*p.*	±		±		±		±				
8	4	41	3	6	2	4	—	0,03	+	0,06	—	0,12	+	0,24	3	9	54
8	5	113	4	6	12	29	+	0,02	+	0,15	+	0,58	+	4,35			
8	6	171	0	6	5	0		.		.		.		.			
8	1	322	3	6	5	9	+	0,04	+	0,18	+	0,36	+	1,62			
4	5	72	5	2	12	12	+	0,07	+	0,09	+	0,84	+	1,08	4	16	32
4	6	130	3	2	5	3	+	0,06	+	0,09	+	0,18	+	0,27			
4	1	281	5	2	5	5	+	0,06	+	0,09	+	0,30	+	0,45			
5	6	58	4	12	5	24	+	0,06	+	0,10	+	1,44	+	2,40	1	1	12
5	1	209	2	12	5	12	+	0,05	+	0,11	+	0,60	+	1,32			
6	1	151	2	5	5	5	+	0,06	+	0,08	+	0,30	+	0,40	3	9	45
															1	1	5
						$p = p_w\,u_m\,u_n$.				[p]	103					[uhh]	148
											+	4,60	+	12,13			
											—	0,12	—	0,00			
								$[p\,\delta y]$ und $[p\,\delta x]$			+	4,48	+	12,13	$M = \sqrt{\frac{[uhh]}{(n-2)\,[u]}}$.		
								$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$ und $\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$			+	0,04	+	0,12			
						y	—	604,86		x_0	+	3 882,00			$= \sqrt{\frac{148}{3 \times 30}}$		
						$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$	+	0,04		$\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$	+	0,12					
						y	—	604,82		x	+	3 882,12			$= \pm 0{,}013^{m}$.		

Punkt P : 9.

7. Berechnung der definitiven Neigungen ν.

$y = -\ 604{,}82$
$x = +\ 3\,882{,}12$

nach dem Punkte	P_8.	P_4.	P_5.	P_6.	P_1.	
y_n	− 2 254,64	− 5 029,23	− 1 604,61	+ 696,15	± 0,00	
x_n	+ 937,78	+ 2 302,57	+ 5 178,57	+ 7 443,10	± 0,00	
$y_n - y$	− 1 649,82	− 4 424,41	− 999,79	+ 1 300,97	+ 604,82	
$x_n - x$	− 2 944,34	− 1 579,55	+ 1 296,45	+ 3 560,98	− 3 882,12	
$\log (y_n - y)$	3. 21 743n	3. 64 586n	2. 99 991n	3. 11 427	2. 78 162	
$\log (x_n - x)$	3. 46 899n	3. 19 853n	3. 11 276	3. 55 157	3. 58 907n	
$\log tg\ \nu_n$	9. 74 844	0. 44 733	9. 88 715n	9. 56 270	9. 19 255n	

8. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

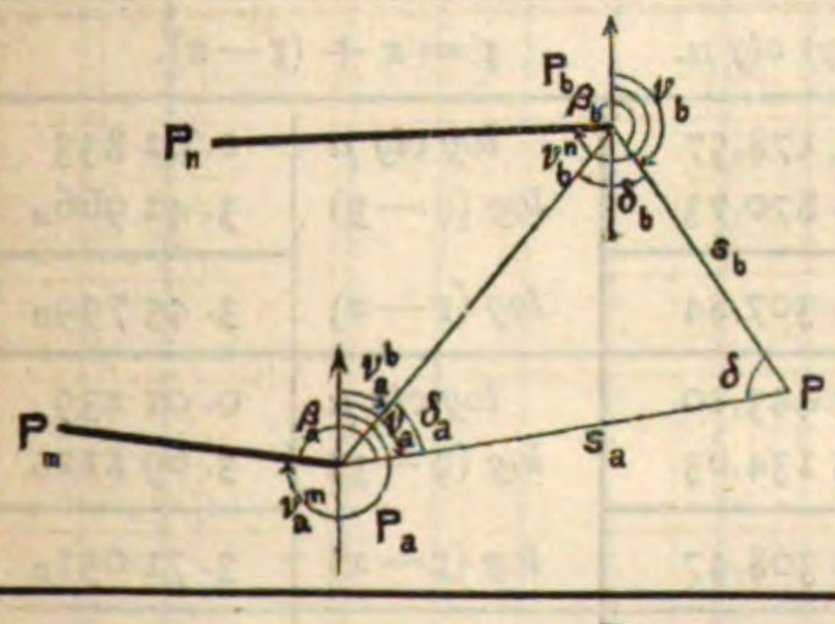
P_n.	ν_n. ° ′ ″	α_n. ° ′ ″	$\nu_0 + \alpha_n$. ° ′ ″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$. + ″	− ″	φ. ° ′ ″
P_8	209 15 46	318 54 33	209 15 45	1	.	. . .
P_{10}	. . .	356 32 21	246 53 33	.	.	246 53 34
P_4	250 21 12	0 0 0	250 21 12	0	.	. . .
P_5	322 21 42	72 0 32	322 21 44	.	2	. . .
P_6	20 4 9	129 42 56	20 4 8	1	.	. . .
P_{11}	. . .	152 59 47	43 20 59	.	.	43 21 0
P_{12}	. . .	210 23 12	100 44 24	.	.	100 44 25
P_1	171 8 41	280 47 26	171 8 38	3	.	. . .
				3	.	
			$0 = \frac{+3}{5} =$	1	.	

Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der durch Einschneiden bestimmten Punkte mit Hülfe graphischer Darstellung der Schnittpunkte.

Lauf. No. 8.

Zu bestimmender Punkt P: 10.

2. Berechnung der genäherten Koordinaten aus dem Schnitte zweier Visirstralen.



$$tg\,\nu_a^b = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}. \qquad m = \frac{y_b - y_a}{\sin\delta \sin\nu_a^b}.$$

$$\begin{array}{l|l} y = y_a + \Delta y_a. & x = x_a + \Delta x_a. \\ \quad = y_b + \Delta y_b. & \quad = x_b + \Delta x_b. \end{array}$$

Probe: $\Delta y_a - \Delta y_b = y_b - y_a.$ $\quad \Delta x_a - \Delta x_b = x_b - x_a.$

$$\Delta y_a = m \sin\delta_b \sin\nu_a.$$
$$\Delta x_a = m \sin\delta_b \cos\nu_a.$$
$$\Delta y_b = m \sin\delta_a \sin\nu_b.$$
$$\Delta x_b = m \sin\delta_a \cos\nu_b.$$

	P_a : 5. ° ′ ″			±	P_b : 8.	±			
				y_a	— 1 604,61	x_a	+ 5 178,57	$\log\sin\nu_a$	9. 83 486n
				y_b	— 2 254,64	x_b	+ 937,78	$\log m$	3. 63 816
ν_a	223	7	58	$y_b - y_a$	— 650,03	$x_b - x_a$	— 4 240,79	$\log\sin\delta_b$	9. 95 664
ν_b	303	53	36		— 1		— 2	$\log\cos\nu_a$	9. 86 318n
				Δy_a	— 2 689,44	Δx_a	— 2 870,67		
ν_a^b	188	42	52		+ 1		+ 1		
				Δy_b	— 2 039,43	Δx_b	+ 1 370,09	$\log \Delta y_a$	3. 42 966n
$\delta_a = \nu_a - \nu_a^b$	34	25	6	y	— 4 294,06	x	+ 2 307,88	$\log \Delta x_a$	3. 45 798n
$\delta_b = \nu_a^b - \nu_b \pm \pi$	64	49	16			$\log (y_b - y_a)$	2. 81 293n	$\log\sin\nu_b$	9. 91 912n
$\delta = \nu_b - \nu_a$	80	45	38			$-\log (x_b - x_a)$	3. 62 745n	$\log m$	3. 63 816
						$\log tg\,\nu_a^b$	9. 18 548	$\log\sin\delta_a$	9. 75 223
$\delta_a + \delta_b + \delta$	180	0	0			$\log (y_b - y_a)$	2. 81 293n	$\log\cos\nu_b$	9. 74 636
						$cpl\log\sin\delta$	0. 00 567	$\log \Delta y_b$	3. 30 951n
						$cpl\log\sin\nu_a^b$	0. 81 956n	$\log \Delta x_b$	3. 13 675
						$\log m$	3. 63 816		

Stral.	1. Ableitung der Neigungen μ der Visirstralen aus den Winkelbeobachtungen.															Zu bestimmender 3. Stralengewichte.			
	φ. ° ′ ″			α. ° ′ ″			ψ. ° ′ ″			$\varphi-\psi$ + ″	$\varphi-\psi$ − ″	$\mu=\frac{\varphi+\psi}{2}$. ° ′ ″			s.	$\frac{1}{s}$.	t.	u.
P_5	223	7	58	.	.	.	.	.	.	.	.	223	7	58	3930	25	1	25
P_6	224	10	58	.	.	.	.	.	.	.	.	224	10	58	7160	14	1	14
P_9	246	53	34	.	.	.	.	.	.	.	.	246	53	34	4010	25	1	25
P_1	298	15	21	.	.	.	.	.	.	.	.	298	15	21	4880	20	1	20
P_8	303	53	36	.	.	.	.	.	.	.	.	303	53	36	2460	41	1	41
															$u=\frac{t}{s}$.		[u]	125

4. Berechnung der Achsenabstände $\mathfrak{x}$.

	$\mathfrak{y}$	—	4 294,06	$\mathfrak{x}-x=(\mathfrak{y}-y)\,ctg\,\mu$.			$\mathfrak{x}=x+(\mathfrak{x}-x)$.	
P_5	y	—	1 604,61	x	+	5 178,57	*log ctg* μ	0. 02 833
				$\mathfrak{x}-x$	−	2 870,73	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 42 966n
	$\mathfrak{y}-y$	—	2 689,45	$\mathfrak{x}$	+	2 307,84	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 45 799n
P_6	y	+	696,15	x	+	7 443,10	*log ctg* μ	0. 01 239
				$\mathfrak{x}-x$	−	5 134,63	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 69 812n
	$\mathfrak{y}-y$	—	4 990,21	$\mathfrak{x}$	+	2 308,47	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 71 051n
P_9	y	—	604,82	x	+	3 882,12	*log ctg* μ	9. 63 011
				$\mathfrak{x}-x$	−	1 574,18	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 56 694n
	$\mathfrak{y}-y$	—	3 689,24	$\mathfrak{x}$	+	2 307,94	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 19 705n
P_1	y	±	0,00	x	±	0,00	*log ctg* μ	9. 73 034n
				$\mathfrak{x}-x$	+	2 307,84	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 63 287n
	$\mathfrak{y}-y$	—	4 294,06	$\mathfrak{x}$	+	2 307,84	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 36 321
P_8	y	—	2 254,64	x	+	937,78	*log ctg* μ	9. 82 724n
				$\mathfrak{x}-x$	+	1 370,09	*log* $(\mathfrak{y}-y)$	3. 30 951n
	$\mathfrak{y}-y$	—	2 039,42	$\mathfrak{x}$	+	2 307,87	*log* $(\mathfrak{x}-x)$	3. 13 675

Punkt P : 10.

Schnitt-punkte.		*5. Berechnung der definitiven Koordinaten y, x.*												*6. Mittlerer Fehler.*		
		Gewichte d. Schnittpunkte.					δy.		δx.		$p\,\delta y$.		$p\,\delta x$.				
		Winkel. °	p_w.	u_m.	u_n.	p.	±		±		±		±		h.	hh.	uhh.
5	6	1	0	25	14	0		.		.		.		.	12	144	3600
5	9	24	2	25	25	13	+	0,16	+	0,01	+	2,08	+	0,13			
5	1	75	5	25	20	25	±	0,00	—	0,16	±	0,00	—	4,00			
5	8	81	5	25	41	51	+	0,02	—	0,14	+	1,02	—	7,14			
6	9	23	1	14	25	3	—	0,88	—	0,44	—	2,64	—	1,32	33	1089	15246
6	1	74	5	14	20	14	—	0,39	+	0,06	—	5,46	+	0,84			
6	8	80	5	14	41	29	—	0,35	+	0,11	—	10,15	+	3,19			
9	1	51	3	25	20	15	—	0,10	—	0,10	—	1,50	—	1,50	2	4	100
9	8	57	4	25	41	41	—	0,06	—	0,09	—	2,46	—	3,69			
1	8	6	0	20	41	0		.		.		.		.	5	25	500
															2	4	164
		$p = p_w\,u_m\,u_n$.			[p]	191					+	3,10	+	4,16		[uhh]	19610
											—	22,21	—	17,65			
							$[p\,\delta y]$ und $[p\,\delta x]$				—	19,11	—	13,49	$M = \sqrt{\frac{[uhh]}{(n-2)\,[u]}}$.		
							$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$ und $\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$				—	0,10	—	0,07			
		y	—	4 294,06			x_0				+	2 308,00			$= \sqrt{\frac{19610}{3 \times 125}}$		
		$\frac{[p\,\delta y]}{[p]}$	—	0,10			$\frac{[p\,\delta x]}{[p]}$				—	0,07					
		y	—	4 294,16			x				+	2 307,93			$= \pm 0{,}072^{m}$.		

Punkt P : 10.

7. *Berechnung der definitiven Neigungen v.*						$y = -4\,294{,}16$ $x = +2\,307{,}93$
nach dem Punkte	P_5.	P_6.	P_9.	P_1.	P_8.	
y_n	− 1 604,61	+ 696,15	− 604,82	± 0,00	− 2 254,64	
x_n	+ 5 178,57	+ 7 443,10	+ 3 882,12	± 0,00	+ 937,78	
$y_n - y$	+ 2 689,55	+ 4 990,31	+ 3 689,34	+ 4 294,16	+ 2 039,52	
$x_n - x$	+ 2 870,64	+ 5 135,17	+ 1 574,19	− 2 307,93	− 1 370,15	
$\log (y_n - y)$	3. 42 968	3. 69 813	3. 56 695	3. 63 288	3. 30 953	
$\log (x_n - x)$	3. 45 798	3. 71 056	3. 19 705	3. 36 323n	3. 13 677n	
$\log tg\, v_n$	9. 97 170	9. 98 757	0. 36 990	0. 26 965n	0. 17 276n	

8. *Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.*

P_n.	v_n. °	′	″	a_n. °	′	″	$v_0 + a_n$. °	′	″	$v_n - (v_0 + a_n)$. + ″	− ″	φ. °	′	″
P_5	43	8	5											
P_6	44	10	48	Auf P_{10} hat eine Winkelmessung										
P_9	66	53	36	nicht stattgefunden.										
P_1	118	15	23											
P_8	123	53	36											

Die Rechnung beginnt damit, unter lauf. No. 1 bis 5 in je zwei Abteilungen 7 und 8 für die bei der Winkelbeobachtung benutzten Stralenverbindungen der gegebenen Punkte die Neigungen ν zu berechnen und mit Hülfe der Letzteren und der auf den gegebenen Punkten beobachteten Richtungen die Neigungen φ der von diesen Punkten ausgehenden Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte abzuleiten. Der Grund, aus welchem diese beiden Abteilungen mit 7 und 8 numerirt sind, ergibt sich aus den vollständigen Rechenformularen unter lauf. No. 6 bis 8, in welchen diese mit der gleichen Ordnungsnummer bezeichneten Abteilungen den Schluss der Rechnung auf jedem neu bestimmten Punkte bilden.

Auf jedem gegebenen Punkte sind von vornherein die Neigungen φ für alle von demselben ausgehenden Stralen zur Bestimmung weiterer Punkte abgeleitet worden, in der Weise, dass die beobachteten Richtungswinkel α zur vorläufigen Orientirung an die definitive Neigung ν desjenigen Strals geknüpft sind, welche für die Richtungswinkel α als Nullrichtung angenommen ist. So sind unter lauf. Nummer 1, wo die Richtungswinkel α auf den Stral P_4 als Nullrichtung bezogen sind, alle Richtungswinkel zu $\nu_4 = 294° 36' 0''$ als ν_0 addirt, was zu den Winkeln $\nu_0 + \alpha_n$ fürt. In dem Falle der lauf. Nummer 5 ist für die Nullrichtung der Richtungswinkel α eine Neigung ν nicht vorhanden. Hier war deshalb die vorläufige Orientirung an einen anderen Stral, für welchen ν und gleichzeitig α bekannt ist, zu knüpfen. Es ist hierzu der Stral P_7, wofür $\nu_7 = 130° 17' 30''$ ist, in der Weise benutzt worden, dass aus $\nu_7 - \alpha_7 = 130° 17' 30'' - 25° 35' 35''$ die Neigung $\nu_0 = 104° 41' 55''$ hergeleitet und nun zu Letzterer nach und nach alle Richtungswinkel α addirt wurden, was für $\nu_0 + \alpha_7$ wieder auf $\nu_7 = 130° 17' 30''$ zurückfüren musste.

Weiter sind für diejenigen n Stralen, für welche ν_n und zugleich $\nu_0 + \alpha_n$ gegeben sind, die Differenzen $\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$ gebildet worden, aus deren algebraischer Summe $[\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)]$ und Anzal n sich die Orientirungsverbesserung

$$(1) \qquad o = \frac{[\nu_n - (\nu_0 - \alpha_n)]}{n}$$

ergibt, welche den vorläufig auf die Nullrichtung orientirten Neigungen $\nu_0 + \alpha_n$ beizufügen ist, um die schliefslichen Neigungen φ zu erhalten. Die Letzteren werden dabei nur für diejenigen Stralen formirt und in das Rechenformular eingetragen, welche zur Bestimmung weiterer Punkte dienen, wärend es für die Stralen nach gegebenen Punkten der Angabe einer Neigung φ nicht bedarf, da für dieselben die bereits definitiv feststehenden Neigungen ν, an denen nichts mehr zu ändern ist, beizubehalten sind.

Dieses Verfaren der Ableitung der Neigungen φ entspricht ganz dem im § 2 auf Seite 7 beschriebenen und auch in der Abteilung 1 der Rechenformulare unter lauf. Nummer 6 und 7 angewendeten Verfaren der Ableitung der Neigungen ψ. Von der auf Seite 6 zur vorläufigen einfacheren Veranschaulichung für Anfänger angegebenen Art der Herleitung der φ weicht es zwar in der Form, nicht aber in der Wirkung ab. Denn wenn dort (Fig. 4) für den Stral P_a die Neigung φ_a aus dem arithmetischen Mittel von $\varphi_{a\beta} = \nu_a^b + \beta_a$ und $\varphi_{a\gamma} = \nu_a^f - \gamma_a$ zu $11° 37' 58''$ gefunden worden ist, so ist dies in der Erwägung, dass

für den Stral von P_a nach	P_b:	$\alpha_b =$	$0° 0' 0''$
„ „ „ „ „ „	P :	$\alpha = \beta_a$	$= 95\ 11\ 14''$
„ „ „ „ „ „	P_f:	$\alpha_f = \beta_a + \gamma_a$	$= 191\ 43\ 7$,

gleichbedeutend mit der folgenden, in dem Rechenformular angewendeten Form der Herleitung:

P_n.	ν_n.	α_n.	$\nu_o + \alpha_n$.	$\nu_n - (\nu_o + \alpha_n)$. +	$\nu_n - (\nu_o + \alpha_n)$. −	φ.
P_b	276° 26′ 51″	0° 0′ 0″	276° 26′ 51″	.	0″	. . .
P	. . .	95 11 14	11 38 5	.	.	11° 37′ 58″
P_f	108 9 43	191 43 7	108 9 58	.	15	. . .
				.	15	
			$0 = \frac{-15}{2} =$	.	7	

Diese Art der Ableitung in den Rechenformularen ist aber wesentlich einfacher und erfordert einen namhaft geringeren Zeitaufwand, wenn die Stralen, deren Neigungen ν als Grundlage für die Ableitung der Neigungen φ weiterer Stralen dienen, an Zal zunehmen, wie solches in der Praxis vorzugsweise bei dem weiteren Fortschreiten der Rechnung, nachdem die bereits definitiv bestimmten Punkte den ursprünglich gegebenen Punkten hinzutreten und diesen gleich zu behandeln sind, vorzukommen pflegt.

Wie bereits angedeutet, sind unter lauf. Nummer 1 bis 5 und demnächst auch unter lauf. Nummer 6 bis 8, nachdem die betreffenden Punkte definitiv bestimmt worden, auf jedem Punkte von vornherein die Neigungen φ aller Stralen abgeleitet, welche zu weiteren Punktenbestimmungen dienen. Es könnte nun aber die Frage entstehen, ob es nicht angezeigt wäre, diese Ableitung successive vorzunehmen, etwa in der Weise, dass beispielsweise nur für den zuerst zu verwendenden Stral P_8, welcher nach lauf. Nummer 6 zur Bestimmung des Punktes P_8 dient, die Neigung φ abgeleitet, und dann später, sobald der nächst folgende Stral P_9 behufs Bestimmung des Punktes P_9 (lauf. Nummer 7) zur Benutzung gelangt, die Neigung φ_9 auf P_1 wieder für sich, und zwar unter Mitheranziehung der dann bereits definitiv bekannten Neigung ν_1^8 berechnet wird. Allein diese Frage ist im Allgemeinen zu verneinen, da — selbst abgesehen von der hierdurch bedingten erheblichen Rechnungserschwernis — jeder neu festgelegte Punkt neue Fehler in die Rechnung hineinträgt, welche im Allgemeinen gröfser sein werden, als die Fehler der bereits bekannten Punkte. Die Mithineinziehung der successive festgelegten neuen Stralen für die Ableitung der φ wird daher im Allgemeinen eher ungünstig als günstig wirken.

Hieraus ergibt sich die Regel, dass bei der Ableitung der Neigungen φ auf dem Punkte P_n nur die Neigungen ν derjenigen Stralen zu benutzen sind, welche bereits feststehen, sobald P_n zum ersten Male zu weiteren Punktenbestimmungen herangezogen wird. In dem Falle, wenn P_n nicht ursprünglich gegeben, sondern erst durch die in der Ausfürung begriffene Triangulation bestimmt worden ist, sind dies dieselben Stralen, welche zur Festlegung von P_n gedient haben, vorausgesetzt, dass ihre Richtungen auf P_n beobachtet sind, sie also nicht zu den auf ihrem anderen Endpunkte einseitig beobachteten Stralen gehören.

Unter lauf. Nummer 6 ist nun der erste Punkt P_8 bestimmt worden. Die Rechnung beginnt in der Abteilung 1: „Ableitung der Neigungen μ der Visirstralen aus den Winkelbeobachtungen“ *). Die Neigung φ_4 für den Stral P_4 ist aus lauf. Nummer 3, φ_5 aus lauf. Nummer 4, φ_1 aus lauf. Nummer 1, φ_2 aus lauf. Nummer 2 vorgetragen. Die Stralen P_3 und P_6 sind, da für dieselben zwar die Richtungswinkel α, nicht aber die Neigungen φ gegeben sind, auf P_8 einseitig beobachtet. Auch der

*) Die Nummern 1 bis 8 der Abteilungen deuten den Gang der Rechnung an. Dass die Abteilungen im Rechenschema selbst sich nicht nach ihrer Nummerfolge an einander reihen, wird durch die Rücksicht auf den Raum bedingt.

Stral P_2 ist — aber umgekehrt — einseitig beobachtet, da φ, nicht aber α gegeben ist. Die Ableitung der μ ist ganz wie auf Seite 7 und 14 angegeben bewirkt.

Mit den Neigungen μ_4 und μ_5 sind nun als ν_a und ν_b in Abteilung 2 die genäherten Koordinaten η, ξ für P_8 aus dem Schnitte der Stralen P_4 und P_5 berechnet. Die hierbei zur Anwendung kommenden Formeln (1), (3) bis (7), (9) bis (12) und (17) bis (20) des § 14 der „Trigon. und polygon. Rechnungen“ sind in dem Formular vorgedruckt.

In der Abteilung 3 sind die Stralengewichte u nach der Formel (6) in § 2 berechnet.

Die Berechnung der Achsenabstände ξ in der Abteilung 4 ist nach den Formeln (1) und (2) des § 2 bewirkt. Dabei ist für den Stral P_2, da μ_2 nahe parallel der Abscissenachse ist, ausser ξ auch noch $\Delta\eta$ nach Formel (3) im § 2 berechnet. Für die Stralen P_4 und P_5 hätte, da $\eta = -2254{,}59$ one Abrundung in Rechnung gestellt ist, in Uebereinstimmung mit der Rechnung in Abteilung 2 sich $\xi = +937{,}81$ ergeben sollen. Es ist aber gefunden $\xi_4 = +937{,}79$, $\xi_5 = +937{,}87$. Die Abweichung findet ihren Grund in der Ungenauigkeit der letzten Zalenstellen in Verbindung mit dem Umstande, dass der Stral P_5 nahe parallel mit der Abscissenachse läuft. An sich ist die Abweichung selbst bei ξ_5 praktisch one Bedeutung, da der spitzwinklige Schnitt des Strals P_5 mit der Parallelen zur Abscissenachse als solcher für die weiteren Rechnungen bestimmend nicht in Betracht kommt.

In der 5. Abteilung sind die Gewichte p nach Formel (8) im § 2 berechnet. Die Gewichte p_w sind aus dem Täfelchen der Schnittklassen auf Seite 12 entnommen. Da hiernach die Schnittpunkte 3,5, 3,6 und 4,1 in die Klasse der unbrachbaren Schnitte mit dem Gewichte $p_w = 0$ gehören, so war auch $p = 0$ zu setzen. In dem nicht mit abgedruckten lithographirten Kreise zur Konstruktion der Schnittfigur war der Achsenabstand η der Geraden NS zu $-2254{,}59$, der Achsendabstand ξ_o der Geraden WO zu $+937{,}80$ angenommen worden.

In der Abteilung 6 sind die h, hh und uhh, sowie der mittlere Fehler M nach Formel (9) im § 2 berechnet.

In den Abteilungen 7 und 8 sind endlich die definitiven Neigungen ν für diejenigen Stralen, welche den Punkt P_8 bestimmt haben, sowie die Neigungen φ der Stralen P_{10}, P_9, P_{11}, P_{12} zur Bestimmung der weiteren gleichnamigen Punkte in der bereits zu lauf. Nummer 1 bis 5 erläuterten Weise berechnet. In der Abteilung 8 mussten unter α für die Stralen P_3, P_4, P_5, P_6, P_1 dieselben Richtungswinkel wie in Abteilung 1 erscheinen, denselben aber noch die Richtungswinkel der Stralen P_{10}, P_9, P_{11}, P_{12} für die weiteren Punktenbestimmungen hinzutreten.

Bei der nun folgenden Bestimmung des Punktes P_9 unter lauf. Nummer 7 aus den Stralen P_8, P_4, P_5, P_6, P_1 ist in Abteilung 1 die Neiguug φ_8 aus lauf. Nummer 6, φ_5 aus lauf. Nummer 4, φ_6 aus lauf. Nummer 5, φ_1 aus lauf. Nummer 1 entnommen.

Unter lauf. Nummer 8 endlich ist zur Bestimmung des Punktes P_{10} die Neigung φ_5 aus lauf. Nummer 4, φ_6 aus lauf. Nummer 5, φ_9 aus lauf. Nummer 7, φ_1 aus lauf. Num. 1, φ_8 aus lauf. Num. 6 vorgetragen. Eine Winkelbeobachtung hat auf P_{10} nicht stattgefunden, es liegt also der einfache Fall des Vorwärtseinschneidens vor, weshalb hier in der 1. Abteilung Richtungswinkel α und Neigungen ψ nicht zu verzeichnen, die Winkel φ vielmehr unmittelbar als μ zu nehmen waren. In Folge dessen waren unter dieser lauf. Nummer 8 auch in Abteilung 8 nur die definitiven Neigungen ν zu den in Abteilung 7 berechneten Tangenten-Logarithmen einzutragen, wärend die Herleitung von Neigungen φ für weitere Punktenbestimmungen wegfällig wurde.

Im Uebrigen kann zur Erläuterung der Rechnungen unter lauf. Nummer 7 und 8 auf die Erläuterungen zu lauf. Nummer 6 verwiesen werden.

Die in der Abteilung 8 der lauf. Nummer 1, 4, 5, 6 und 7 vorkommenden

Neigungen φ der Stralen P_{11} und P_{12} finden ihre Verwendung erst bei der Berechnung der Punkte P_{11} und P_{12}, welche nicht mit abgedruckt ist.

Wenn von den in Abteilung 8 der Rechnungen unter lauf. Nummer 6 und 7 angegebenen Werte $\nu_n - (\nu_o + \alpha_n)$ die Orientirungsverbesserung $o = \frac{[\nu_n - (\nu_o + \alpha_n)]}{n}$ subtrahirt wird, so erhält man die Aenderungen, welche die beobachteten Richtungswinkel α durch die definitiven Koordinaten y, x erfaren haben.

Für die richtige Berechnung der definitiven Neigungen ν in Abteilung 7, sowie der γ in Abteilung 4 bieten die aus der Schnittfigur entnommenen, bereits bei der Berechnung des mittleren Fehlers M in Abteilung 6 des Rechenformulars verwendeten senkrechten Abstände h des Punktes P von den einzelnen Visirstralen eine Rechenprobe dar. Man erhält nämlich mit Benutzung dieser Abstände und der in Abteilung 3 angegebenen genäherten Stralenlängen s nach der Formel:

$$(2) \qquad v = \frac{h}{s} \varrho''$$

in Sekunden die Verbesserung, welche den in Abteilung 1 angegebenen vorläufigen Neigungen μ ausser der bekannten Reduktion $\pm \pi$ hinzuzulegen ist, um die in Abteilung 7 aus den Koordinaten berechneten definitiven Neigungen ν auf anderem Wege nochmals zu erhalten. Dabei sind die h mit positivem oder negativem Vorzeichen anzusetzen, je nachdem der definitive Punkt P, von dem Ausgangspunkte des betreffenden Strals nach P gesehen, rechts oder links des Strals liegt. Für das Beispiel unter lauf. Nummer 6 stellt sich die Rechnung wie folgt:

	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2
h_n	— 0,034	+ 0,032	+ 0,035	+ 0,050	± 0,000	+ 0,166
s_n	4490	3090	4290	7140	2440	5340
log h_n	8. 531$_n$	8. 505	8. 544	8. 699	.	9. 220
cpl log s_n	6. 348	6. 510	6. 368	6. 146	.	6. 272
log ϱ''	5. 314	5. 314	5. 314	5. 314	.	5. 314
log v_n	0. 193$_n$	0. 329	0. 226	0. 159	.	0. 806
v_n	— 2″	+ 2″	+ 2″	+ 1″	± 0″	+ 6″
nach Abteilung 1 ist μ_n	16	28	50	54	2	41
ausgeglichen ν_n	14	30	52	55	2	47
nach Abteilung 7 ist ν_n	13	30	52	56	2	47

Die μ und ν sind unter Weglassung der Grade und Minuten nur mit ihrer Sekundenzal eingetragen. Die Uebereinstimmung mit der Berechnung in Abteilung 7 ist genügend.

Bei einiger Uebung lässt sich diese an sich sehr nützliche Probe one Rechnung schon aus der Anschauung der Figur oder besser noch mit Hülfe eines Diagramms beschaffen, aus welchem die Sekundenzal der Winkeländerung v mit dem Zirkel entnommen wird.

---

*) Wegen eines solchen Diagramms vgl. Jordan, „Monatsblatt des badischen Geometervereins", Jargang 1871, Seite 41.

Die angewendete Art der Herleitung der Neigungswinkel ψ und φ in Abteilung 1 und 8 der vorstehenden Rechnungen geht in Betreff der Winkel α im Allgemeinen von der Voraussetzung aus, dass bei der Winkelmessung Richtungsbeobachtungen und nicht Winkelbeobachtungen gemacht, d. h. dass auf den Winkelmessungspunkten die Richtungen nach den beobachteten Signalen bei satzweise feststehendem Limbuskreise durch allmähliges Herumfüren des Theodolitenfernrors mit dem Alhidadenkreise gemessen worden sind, oder dass, wenn die Winkel, welche die Richtungen nach den beobachteten Signalen unter sich oder mit einer als Nullrichtung angenommenen Richtung bilden, gemessen worden, eine Ausgleichung der gemessenen Winkel auf der Station (Horizontabschluss) stattgefunden hat, kurz abhängige Winkel vorliegen *). Bei der Art der trigonometrischen Punktenbestimmung, um welche es sich hier handelt, wird jedoch aus praktischen Gründen eine Unterscheidung in dieser Beziehung unbedenklich vernachlässigt und werden daher auch die Winkelbeobachtungen ganz wie die Richtungsbeobachtungen behandelt werden können.

Auch über die sonstigen Bedenken, welche vom theoretischen Standpunkte gegen die vorgeschlagene Methode geltend gemacht werden könnten, wird man vom Standpunkte der Praxis hinweg zu sehen berechtigt sein. Diese Methode des Einschneidens wird bei sachgemäfser Anwendung jederzeit gute Resultate liefern. Sie ermöglicht die mannigfachste Anwendung, indem sie zugleich die mit dem Einschneiden sonst verbundenen zeitraubenden Rechnungen tunlichst beschränkt und doch den Vorteil der Verwertung aller brauchbaren Stralenkombinationen für das Schlussresultat gestattet. Dabei kann zugleich die bei Dreiecksmessungen sonst wichtige Rücksicht auf gut gestaltete Dreiecke durch Vermeidung sehr stumpfer oder sehr spitzer Winkel ausser Betracht bleiben, wenn nur auf die Erlangung gut gestalteter Schnitte Bedacht genommen wird. An Letzteren wird es namentlich dann nicht fehlen, wenn die Schnittstralen möglichst von allen Seiten den zu bestimmenden Punkt treffen. Einige Schnitte mehr fallen für den Arbeitsaufwand beim Rechnen und bei der graphischen Darstellung nicht erheblich in's Gewicht, wärend sie die Güte des Resultats wesentlich erhöhen. An sich ist die Methode überall am Platze, wo der zu bestimmende Punkt durch mehr als zwei Visirstralen getroffen wird, mithin nicht lediglich die Berechnung eines einzigen Schnittpunkts nach § 14 der „Trigon. und polygon. Rechnungen" zu bewirken ist.

Zum Schluss möge noch der in Figur 7 und 8 dargestellte, in der Praxis häufig vorkommende Fall betrachtet werden, in welchem die Punkte P_a, P_b gegeben sind, und mit Hülfe der in P_a, P_b, P_c, P_d gemessenen Winkel die Punkte P_c, P_d durch „Einschneiden" bestimmt werden sollen.

Fig. 7.

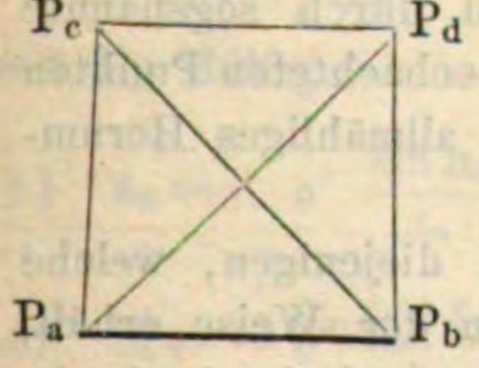
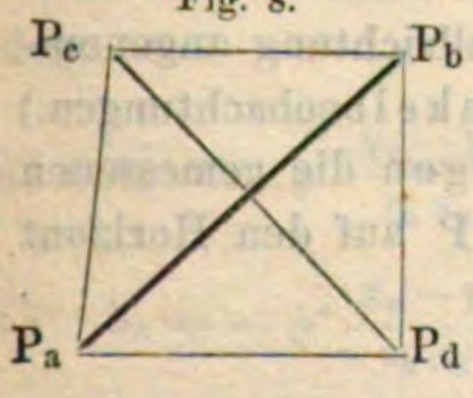


Fig. 8.



Wollte man hier zunächst die Koordinaten für P_c lediglich aus dem $\triangle P_a P_c P_b$, und dann die Koordinaten für P_d aus P_a, P_b und dem nunmehr feststehenden Punkte P_c bestimmen, so würde man dem $\triangle P_a P_c P_b$ einen überwiegenden Einfluss auf die Punktenbestimmung einräumen, was, wenn alle Winkelbeobachtungen mit gleicher Genauigkeit vollzogen sind, nicht gerechtfertigt sein würde. Zu einem änlichen Widerspruch würde man gelangen, wenn man erst P_d aus dem $\triangle P_a P_d P_b$, und dann P_c aus den Punkten P_a, P_b, P_d bestimmen wollte.

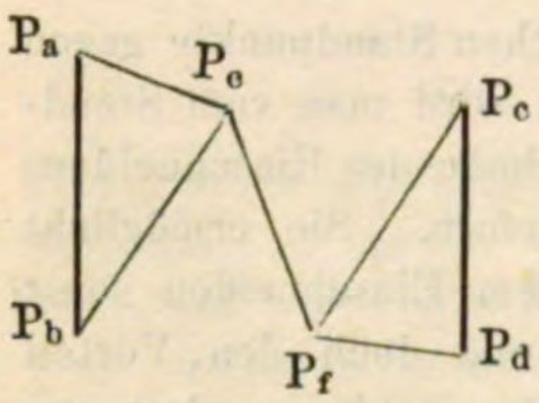
Um diesen Widerspruch one zu weitläufige Rechnungen zu beheben, wird man die Bestimmung durch successive Annäherung bewlrken können. Man bestimme nämlich zunächst aus einem der $\triangle\triangle P_a P_c P_b$ oder $P_a P_d P_b$ die Koordinaten für

*) Wegen abhängiger und unabhängiger Winkelbeobachtungen vgl. § 5.

den dem gesuchten Punkte P_c oder P_d angenäherten Punkt. Angenommen, man habe auf diesem Wege den dem definitiven Punkte P_c angenäherten Punkt C gefunden, so wird ferner aus den drei Punkten P_a, P_b, C in der erläuterten Weise des Einschneidens der ebenfalls angenäherte Punkt D bestimmt. Nun kann man den Punkt P_c aus P_a, P_b, D, und endlich den Punkt P_d aus P_a, P_b, P_c definitiv festlegen. Ist in besonders wichtigen Fällen eine noch schärfere Bestimmung erwünscht oder will man sich von dem erreichten Grade der Annäherung überzeugen, so kann man die so erhaltenen Koordinaten für P_c nochmals als Näherungswerte ansehen und unter Zugrundelegung der Koordinaten für P_d sowie der gegebenen Koordinaten für P_a, P_b die Bestimmung für P_c widerholen. Jedoch wird man hierdurch meistens eine merkliche Aenderung der Koordinaten für P_c nicht mehr erzielen.

Diese Art der Punktenbestimmung durch successive Annäherung kann in änlicher Weise auf alle Fälle mit Vorteil angewendet werden, in welchen es sich um die Festlegung zweier Punkte handelt, welche unter sich durch einen Visirstral verbunden sind. Ein solcher Fall ist in Figur 9 dargestellt, in welcher P_a, P_b, P_c, P_d gegeben und P_e, P_f zu bestimmen sind. Die vorteilhafte Anwendung ist oft selbst dann noch am Platze, wenn dic beiden neu zu bestimmenden, durch einen Visirstral unter sich verbundenen Punkte durch mehr als zwei Stralen mit gegebenen Punkten in Verbindung gesetzt sind,

Fig. 9.



§ 5.

Nachdem bereits am Schlusse des § 1 auf die Vorteile hingewiesen worden ist, welche die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf das „Rückwärtseinschneiden“ auch für die Aufgaben der niederen Geodäsie darbietet, werde nunmehr zur Darstellung des hierbei einzuschlagenden Verfarens übergegangen. *)

Das Verfaren ist verschieden, je nachdem die auf dem Punkte P gemessenen Winkel vermöge der Art ihrer Beobachtung oder ihrer Ausgleichung im Horizontabschluss von einander

I, abhängig, oder
II, unabhängig

sind.

Abhängige Winkel (zu I) werden im Allgemeinen erhalten durch sogenannte Richtungsbeobachtungen, wobei alle Richtungen nach den beobachteten Punkten bei satzweise feststehendem Limbuskreise des Theodoliten durch allmähliges Herumfüren des Fernrors mit dem Alhidadenkreise gemessen werden.

Unabhängige Winkel (zu II) dagegen sind im Allgemeinen diejenigen, welche man durch sogenannte eigentliche Winkelbeobachtungen in der Weise erhält, dass die Winkel gemessen werden, welche die einzelnen Richtungen nach den beobachteten Punkten je unter sich oder mit einer oder mehreren als Nullrichtung angenommenen Richtungen bilden. (Die sogenannte Repetition ergibt Winkelbeobachtungen.)

Werden aber im Falle der eigentlichen Winkelbeobachtungen die gemessenen Winkel vor ihrer Verwendung für die Bestimmung des Punktes P auf den Horizont

---

*) S. Gaufs, „Astron. Nachrichten“, Band 1 No. 6 (1823); Gerling, „Die Poth. Aufgabe in praktischer Beziehung“, Marburg 1840; J. H. Franke, „Die Dreiecksnetze vierter Ordnung“, München 1871, Seite 148 bis 152 und Seite 187 bis 191; Jordan, „Taschenbuch d. praktischen Geometrie“, Stuttgart 1873, Seite 144 bis 148.

abgeschlossen, wie solches z. B. in dem einfachsten derartigen Falle stattfindet, wenn alle Winkel zwischen je zwei benachbarten Stralen gemessen und in ihrer Summe auf den Sollbetrag von 2π ausgeglichen werden, so sind dieselben als abhängige Winkel (zu I) anzusehen. Das Gleiche ist der Fall, wenn die Winkelbeobachtungen auf eine Nullrichtung bezogen sind, deren Endpunkt nicht zu den gegebenen oder bereits festgelegten Punkten gehört, also in der Ausgleichungsrechnung zur Bestimmung des Punktes P nicht vorkommt. Denn dann stehen die beobachteten Winkel durch die nicht festliegende gemeinschaftliche Nullrichtung in gegenseitiger Abhängigkeit von einander.

Diese Merkmale für die Unterscheidung abhängiger und unabhängiger Winkel werden für die Zwecke des Rückwärtseinschneidens in der niederen Geodäsie im Allgemeinen ausreichen.

Zunächst werde das Ausgleichungsverfaren bei abhängigen Beobachtungen (zu I) behandelt:

Es seien auf P nach n gegebenen Punkten P_a, P_b, P_c, ..., P_n die auf die Anfangsrichtung P_a als Nullrichtung reduzirten Richtungswinkel α_a, α_b, α_c, ..., α_n beobachtet. Aus derjenigen Kombination von dreien dieser Punkte, welche sich durch günstige Lage der Letzteren auszeichnet, werden nach § 1 die genäherten Koordinaten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ des Punktes P berechnet. Es kommt nun, indem die Koordinaten der gegebenen Punkte als fehlerfreie vorausgesetzt werden, darauf an, die Verbesserungen δy, δx zu bestimmen, welche den Werten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ beizufügen sind, um die allen Richtungswinkeln α_a, α_b, α_c, ..., α_n am besten entsprechenden warscheinlichsten Koordinatenwerte

$$y = \mathfrak{y} + \delta y, \qquad x = \mathfrak{x} + \delta x$$

zu erhalten.

Zu diesem Zwecke berechne man aus den genäherten Koordinaten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ und den definitiven Koordinaten y_a, x_a, y_b, x_b, ..., y_n, x_n der gegebenen oder bereits bestimmten Punkte P_a, P_b, ..., P_n die genäherten Neigunngen und die reziproken Werte *) der Stralenlängen:

$$(1)\quad \operatorname{tg} n_a = \frac{y_a - \mathfrak{y}}{x_a - \mathfrak{x}}, \quad \operatorname{tg} n_b = \frac{y_b - \mathfrak{y}}{x_b - \mathfrak{x}}, \quad \ldots \quad \ldots \quad \operatorname{tg} n_n = \frac{y_n - \mathfrak{y}}{x_n - \mathfrak{x}},$$

$$(2)\quad \frac{1}{s_a} = \frac{\sin n_a}{y_a - \mathfrak{y}}, \quad \frac{1}{s_b} = \frac{\sin n_b}{y_b - \mathfrak{y}}, \quad \ldots \quad \ldots \quad \frac{1}{s_n} = \frac{\sin n_n}{y_n - \mathfrak{y}},$$

$$= \frac{\cos n_a}{x_a - \mathfrak{x}}, \quad = \frac{\cos n_b}{x_b - \mathfrak{x}}, \quad \ldots \quad \ldots \quad = \frac{\cos n_n}{x_n - \mathfrak{x}};$$

und die Hülfsgrössen:

$$(3)\quad a_a = \varrho'' \frac{\sin n_a}{s_a}, \quad a_b = \varrho'' \frac{\sin n_b}{s_b}, \quad \ldots \quad \ldots \quad a_n = \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n},$$

$$(4)\quad b_a = -\varrho'' \frac{\cos n_a}{s_a}, \quad b_b = -\varrho'' \frac{\cos n_b}{s_b}, \quad \ldots \quad \ldots \quad b_n = -\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n};$$

oder:

$$(5)\quad a_a = \varrho'' \frac{y_a - \mathfrak{y}}{s_a s_a}, \quad a_b = \varrho'' \frac{y_b - \mathfrak{y}}{s_b s_b}, \quad \ldots \quad \ldots \quad a_n = \varrho'' \frac{y_n - \mathfrak{y}}{s_n s_n},$$

$$(6)\quad b_a = -\varrho'' \frac{x_a - \mathfrak{x}}{s_a s_a}, \quad b_b = -\varrho'' \frac{x_b - \mathfrak{x}}{s_b s_b}, \quad \ldots \quad \ldots \quad b_n = -\varrho'' \frac{x_n - \mathfrak{x}}{s_n s_n}.$$

---

*) Für die weiteren Rechnungen nach Formel (3) und (4) oder (5) und (6) ist es bequem, nicht die Stralenlängen selbst, sondern deren reziproke Werte zu berechnen.

Ferner reduzire man die Neigungen n auf die Anfangsrichtung P_a, indem man die Differenzen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} w_a &= -n_a + n_a = 0,\\ w_b &= -n_a + n_b,\\ w_c &= -n_a + n_c,\\ &\vdots\\ w_n &= -n_a + n_n \end{aligned}$$

bildet. Durch Vergleichung derselben mit den gemessenen, ebenfalls auf die Anfangsrichtung P_a reduzirten Richtungswinkeln α ergeben sich die Fehler:

$$(8)\qquad \begin{aligned} f_a &= w_a - \alpha_a = 0,\\ f_b &= w_b - \alpha_b,\\ f_c &= w_c - \alpha_c,\\ &\vdots\\ f_n &= w_n - \alpha_n. \end{aligned}$$ *)

Jetzt erhält man in der Voraussetzung, dass alle Richtungswinkel als gleich genau angesehen werden können, die n Fehlergleichungen (Bedingungsgleichungen):

$$(9)\qquad \begin{aligned} 0 &= f_a + a_a \cdot \delta x + b_a \cdot \delta y + \delta f_0,\\ 0 &= f_b + a_b \cdot \delta x + b_b \cdot \delta y + \delta f_0,\\ 0 &= f_c + a_c \cdot \delta x + b_c \cdot \delta y + \delta f_0,\\ &\vdots\\ 0 &= f_n + a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y + \delta f_0. \end{aligned}$$

Um von den in diesen n Gleichungen vorkommenden Unbekannten δx, δy, δf_0 zunächst δf_0 (den Orientirungsfehler) zu eliminiren, wird man die n Gleichungen addiren, die Summe durch n dividiren, also das arithmetische Mittel aus denselben bilden, und dieses von jeder einzelnen Gleichung subtrahiren. Dadurch entstehen wider n Gleichungen, in denen aber δf_0 nicht mehr vorkommt, von der Form:

$$(10)\qquad \begin{aligned} 0 &= f_a + a_a \cdot \delta x + b_a \cdot \delta y,\\ 0 &= f_b + a_b \cdot \delta x + b_b \cdot \delta y,\\ 0 &= f_c + a_c \cdot \delta x + b_c \cdot \delta y,\\ &\vdots\\ 0 &= f_n + a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y. \end{aligned}$$

Nach dem Gesagten werden mithin die hierin enthaltenen reduzirten Fehler f und reduzirten Koëffizienten a, b, welche mit den gleichbezeichneten Grössen in (9) nicht mehr gleiche Werte haben, nach Formirung der arithmetischen Mittel

$$(11)\qquad a_m = \frac{a_a + a_b + a_c + \ldots + a_n}{n},$$

$$(12)\qquad b_m = \frac{b_a + b_b + b_c + \ldots + b_n}{n},$$

$$(13)\qquad f_m = \frac{f_a + f_b + f_c + \ldots + f_n}{n},$$

---

*) Zu den gleichen Werten für f_a, f_b, f_c, ..., f_n gelangt man, wenn man statt der Differenzen unter (7) die Summen:

$$n_a + \alpha_0 = n_a, \qquad n_a + \alpha_b, \qquad n_a + \alpha_c, \ \ldots, \qquad n_a + \alpha_n$$

bildet und daraus:

$$\begin{aligned} f_a &= n_a - (n_a + \alpha_a) = 0,\\ f_b &= n_b - (n_a + \alpha_b),\\ f_c &= n_c - (n_a + \alpha_c),\\ &\vdots\\ f_n &= n_n - (n_a + \alpha_n) \end{aligned}$$

herleitet.

wie folgt erhalten:

$$(14)\quad \begin{aligned} &\text{red } a_a = a_a - a_m,\\ &\text{red } a_b = a_b - a_m,\\ &\text{red } a_c = a_c - a_m,\\ &\qquad\vdots\\ &\text{red } a_n = a_n - a_m; \end{aligned} \qquad (15)\quad \begin{aligned} &\text{red } b_a = b_a - b_m,\\ &\text{red } b_b = b_b - b_m,\\ &\text{red } b_c = b_c - b_m,\\ &\qquad\vdots\\ &\text{red } b_n = b_n - b_m; \end{aligned} \qquad (16)\quad \begin{aligned} &\text{red } f_a = f_a - f_m,\\ &\text{red } f_b = f_b - f_m,\\ &\text{red } f_c = f_c - f_m,\\ &\qquad\vdots\\ &\text{red } f_n = f_n - f_m. \end{aligned}$$

Werden hiernach die reduzirten Fehler und Koëffizienten gebildet, so hat man bei der numerischen Rechnung sofort die Fehlergleichungen (10), kann also den Ansatz der Fehlergleichungen (9) mit dem Orientirungsfehler δf_o ganz unterlassen.

Die Auflösung der Fehlergleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt in der Weise, dass

1) der Reihe nach jede einzelne Gleichung unter (10) mit dem in ihr enthaltenen Koëffizienten von δx multiplizirt wird, was ergibt:

$$(17)\quad \begin{aligned} o &= a_a f_a + a_a a_a \cdot \delta x + a_a b_a \cdot \delta y,\\ o &= a_b f_b + a_b a_b \cdot \delta x + a_b b_b \cdot \delta y,\\ o &= a_c f_c + a_c a_c \cdot \delta x + a_c b_c \cdot \delta y,\\ &\vdots\\ o &= a_n f_n + a_n a_n \cdot \delta x + a_n b_n \cdot \delta y; \end{aligned}$$

2) der Reihe nach jede einzelne Gleichung unter (10) mit dem in ihr enthaltenen Koëffizienten von δy multiplizirt wird, wodurch man erhält:

$$(18)\quad \begin{aligned} o &= b_a f_a + a_a b_a \cdot \delta x + b_a b_a \cdot \delta y,\\ o &= b_b f_b + a_b b_b \cdot \delta x + b_b b_b \cdot \delta y,\\ o &= b_c f_c + a_c b_c \cdot \delta x + b_c b_c \cdot \delta y,\\ &\vdots\\ o &= b_n f_n + a_n b_n \cdot \delta x + b_n b_n \cdot \delta y; \end{aligned}$$

3) die Gleichungsgruppen unter No. 1 und unter No. 2 je für sich addirt werden, was die Normalgleichungen:

$$(19)\quad o = [af] + [aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y,$$

$$(20)\quad o = [bf] + [ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y$$

ergibt.

Um hieraus die Unbekannten δx und δy zu entwickeln, wird die Gleichung (19) mit $\frac{[ab]}{[aa]}$ multiplizirt und die dadurch erhaltene Gleichung von (20) subtrahirt, was zu einer Gleichung fürt, in welcher δx nicht mehr vorkommt, also δy gefunden werden kann. Um δy zu eliminiren, wird die Gleichung (19) mit $\frac{[bb]}{[ab]}$ multiplizirt und die so erhaltene Gleichung ebenfalls von (20) subtrahirt, womit man eine Gleichung erhält, aus welcher δx berechnet wird.

Oder man entwickelt die Unbekannten direkt aus:

$$(21)\quad \delta y = \frac{[ab]\cdot[af] - [aa]\cdot[bf]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]\cdot[ab]},$$

$$(22)\quad \delta x = \frac{[ab]\cdot[bf] - [bb]\cdot[af]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]\cdot[ab]}.$$

In anderer Weise kann man aus den Fehlergleichungen unter (9) den Orientirungsfehler δf_o ausscheiden, wenn man die algebraische Summe dieser n Gleichungen, nämlich:

$$(23)\quad o = [f] + [a]\,\delta x + [b]\,\delta y + n\cdot\delta f_o$$

wie jene n Gleichungen selbst mit den in ihr enthaltenen Koëffizienten von δx, δy

multiplizirt und die so erhaltenen beiden Gleichungen mit dem Gewichte

$$-\frac{1}{n}$$

in die Normalgleichungen mit aufnimmt. Die vollständige Multiplikation mit den Koëffizienten von δx, δy ergibt dann:

(24)
$$\begin{aligned}
0 &= a_a f_a + a_a a_a \cdot \delta x + a_a b_a \cdot \delta y + a_a \cdot \delta f_0,\\
0 &= a_b f_b + a_b a_b \cdot \delta x + a_b b_b \cdot \delta y + a_b \cdot \delta f_0,\\
0 &= a_c f_c + a_c a_c \cdot \delta x + a_c b_c \cdot \delta y + a_c \cdot \delta f_0,\\
&\vdots\\
0 &= a_n f_n + a_n a_n \cdot \delta x + a_n b_n \cdot \delta y + a_n \cdot \delta f_0,\\
0 &= -\frac{[a][f]}{n} - \frac{[a][a]}{n}\delta x - \frac{[a][b]}{n}\delta y - \frac{[a]n}{n}\delta f_0;
\end{aligned}$$

(25)
$$\begin{aligned}
0 &= b_a f_a + a_a b_a \cdot \delta x + b_a b_a \cdot \delta y + b_a \cdot \delta f_0,\\
0 &= b_b f_b + a_b b_b \cdot \delta x + b_b b_b \cdot \delta y + b_b \cdot \delta f_0,\\
0 &= b_c f_c + a_c b_c \cdot \delta x + b_c b_c \cdot \delta y + b_c \cdot \delta f_0,\\
&\vdots\\
0 &= b_n f_n + a_n b_n \cdot \delta x + b_n b_n \cdot \delta y + b_n \cdot \delta f_0,\\
0 &= -\frac{[b][f]}{n} - \frac{[a][b]}{n}\delta x - \frac{[b][b]}{n}\delta y - \frac{[b]n}{n}\delta f_0.
\end{aligned}$$

Werden die $n+1$ Gleichungen unter (24), sowie die $n+1$ Gleichungen unter (25) je für sich addirt, so erhält man die beiden Normalgleichungen von der Form wie (19) und (20), aus welchen die Unbekannte δf_0 ebenfalls eliminirt ist, da die Summe der Koëffizienten von δf_0, nämlich

(26)
$$a_a + a_b + a_c + \ldots + a_n - \frac{[a]n}{n} = 0$$

(27)
$$b_a + b_b + b_c + \ldots + b_n - \frac{[b]n}{n} = 0$$

ist. Bei der numerischen Behandlung kann man also hiernach ebenfalls die mit δf_0 behafteten Glieder von vornherein überall ausfallen lassen, wenn man den Fehlergleichungen die Gleichung (23) gleichfalls one das Glied $n \cdot \delta f_0$ beifügt und damit in der erörterten Weise weiter verfärt. *)

Die Auflösung der Normalgleichungen nach δx und δy als Unbekannten geschieht ganz wie oben (Seite 43) gezeigt worden.

Die den definitiven Koordinaten

$$y = \eta + \delta y, \qquad x = \xi + \delta x$$

entsprechenden definitiven Neigungen sind:

(28)
$$\begin{aligned}
\nu_a &= n_a + \delta n_a,\\
\nu_b &= n_b + \delta n_b,\\
\nu_c &= n_c + \delta n_c,\\
&\vdots\\
\nu_n &= n_n + \delta n_n,
\end{aligned}$$

---

*) Bei der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens wird das in den Formeln (10) bis (18) dargestellte Verfaren hinsichtlich des Zeitaufwandes mit demjenigen, welches in (23) bis (25) zur Anschauung gebracht ist, im Wesentlichen auf das Gleiche hinauskommen. Wenn dagegen, wie beispielsweise bei der Aufgabe der unzugänglichen Distanz (Trigon. und polygon. Rechnungen, Seite 141 und 142) der Fall ist, eine gröfsere Zal von Unbekannten vorhanden ist, welche nicht sämmtlich in allen Bedingungsgleichungen vorkommen, wird das letztere Verfaren den Vorzug verdienen.

wo

(29)
$$\begin{aligned} \delta n_a &= a_a \cdot \delta x + b_a \cdot \delta y, \\ \delta n_b &= a_b \cdot \delta x + b_b \cdot \delta y, \\ \delta n_c &= a_c \cdot \delta x + b_c \cdot \delta y, \\ &\vdots \\ \delta n_n &= a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y, \end{aligned}$$

unter a und b nicht die reduzirten (14 bis 16), sondern die ursprünglichen Koëffizienten nach (3) und (4) verstanden.

Die so erhaltenen definitiven Neigungen wird man nur als Rechenprobe ansehen, sie selbst aber aus den Koordinaten nach den gewönlichen Formeln:

(30)
$$\operatorname{tg} \nu_a = \frac{y_a - y}{x_a - x},$$

$$\operatorname{tg} \nu_b = \frac{y_b - y}{x_b - x}, \text{ u. s. w.}$$

herleiten, um sie für die etwaigen weiteren Punktenbestimmungen zu verwenden.

Wiederholt man endlich mit den definitiven Neigungen ν die Formirung der Differenzen unter (7), nämlich

(31)
$$\begin{aligned} \chi_a &= -\nu_a + \nu_a = 0, \\ \chi_b &= -\nu_a + \nu_b, \\ \chi_c &= -\nu_a + \nu_c, \\ &\vdots \\ \chi_n &= -\nu_a + \nu_n, \end{aligned}$$

und formirt weiter:

(32)
$$\begin{aligned} v_a &= \chi_a - \alpha_a = 0, \\ v_b &= \chi_b - \alpha_b = f_b - \delta n_a + \delta n_b, \\ v_c &= \chi_c - \alpha_c = f_c - \delta n_a + \delta n_c, \\ &\vdots \\ v_n &= \chi_n - \alpha_n = f_n - \delta n_a + \delta n_n, \end{aligned}$$

deren arithmetisches Mittel

(33)
$$v_m = \frac{v_a + v_b + v_c + \ldots + v_n}{n}$$

ist, so erhält man in

(34)
$$\begin{aligned} \text{red } v_a &= v_a - v_m, \\ \text{red } v_b &= v_b - v_m, \\ \text{red } v_c &= v_c - v_m, \\ &\vdots \\ \text{red } v_n &= v_n - v_m \end{aligned}$$

die durch die Ausgleichung herbeigefürten warscheinlichsten Verbesserungen der Richtungswinkel α_a, α_b, α_c, ..., α_n oder, anders ausgedrückt, die bestehen gebliebenen Fehler, deren Quadratsumme red [vv] ein Minimum ergeben muss. Indem man diese Quadratsumme zieht und ebenso die Summe red [ff] der Quadrate der nach (16) erhaltenen reduzirten Fehler f_a, f_b, f_c, ..., f_n bildet, erhält man eine weitere Rechenprobe darin, dass

(35)
$$\text{red } [vv] < \text{red } [ff]$$

sein muss. Es ist nützlich, diese Quadratsummen zu ziehen und sich zu überzeugen, dass die Erstere tatsächlich kleiner als die Letztere ist, da hierdurch erfarungsmäfsig etwaige Rechenfehler, namentlich in der Formirung und Auflösung der Normalgleichungen aufgedeckt werden können.

Hat man in dem Falle der Formeln (23) bis (25) die reduzirten Fehler f nach (16) nicht gebildet, so kann man die Formirung der korrespondirenden verbliebenen Fehler red v nach (33) und (34) ebenfalls unterlassen, und die Quadratsummen [ff] und [vv] der Fehler f aus (8) und v aus (32) mit einander vergleichen.

Ist den einzelnen Richtungen verschiedenes Gewicht p_a, p_b, p_c, ..., p_n beizulegen, so erhalten die n Fehlergleichungen (9) folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(36)\qquad o &= p_a f_a + p_a a_a \cdot \delta x + p_a b_a \cdot \delta y + p_a \cdot \delta f_o,\\
o &= p_b f_b + p_b a_b \cdot \delta x + p_b b_b \cdot \delta y + p_b \cdot \delta f_o,\\
o &= p_c f_c + p_c a_c \cdot \delta x + p_c b_c \cdot \delta y + p_c \cdot \delta f_o,\\
&\vdots\\
o &= p_n f_n + p_n a_n \cdot \delta x + p_n b_n \cdot \delta y + p_n \cdot \delta f_o.
\end{aligned}
$$

Aus (11), (12), (13) wird:

$$(37)\qquad a_m = \frac{p_a a_a + p_b a_b + p_c a_c + \ldots + p_n a_n}{[p]},$$

$$(38)\qquad b_m = \frac{p_a b_a + p_b b_b + p_c b_c + \ldots + p_n b_n}{[p]},$$

$$(39)\qquad f_m = \frac{p_a f_a + p_b f_b + p_c f_c + \ldots + p_n f_n}{[p]}.$$

Die hiermit nach (14), (15), (16) erhaltenen reduzirten Koëffizienten und Fehler werden statt in (10) in folgende Fehlergleichungen:

$$
\begin{aligned}
(40)\qquad o &= p_a f_a + p_a a_a \cdot \delta x + p_a b_a \cdot \delta y,\\
o &= p_b f_b + p_b a_b \cdot \delta x + p_b b_b \cdot \delta y,\\
o &= p_c f_c + p_c a_c \cdot \delta x + p_c b_c \cdot \delta y,\\
&\vdots\\
o &= p_n f_n + p_n a_n \cdot \delta x + p_n b_n \cdot \delta y
\end{aligned}
$$

eingefürt, aus welchen sich nunmehr die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
(41)\qquad o &= [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y,\\
o &= [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y
\end{aligned}
$$

ergeben.

Bei Anwendung der Formeln (23) bis (25) wird aus Gleichung (23):

$$(42)\qquad o = [pf] + [pa]\,\delta x + [pb]\,\delta y + [p]\,\delta f_o,$$

und die daraus durch Multiplikation mit den in ihr enthaltenen Koëffizienten von δx, δy gefundenen beiden Gleichungen werden mit dem Gewicht

$$-\frac{1}{[p]}$$

in die Normalgleichungen aufgenommen. Die Gleichungen (24) und (25) gehen in folgende über:

$$
\begin{aligned}
(43)\qquad o &= p_a a_a f_a + p_a a_a a_a \cdot \delta x + p_a a_a b_a \cdot \delta y + p_a a_a \cdot \delta f_o,\\
o &= p_b a_b f_b + p_b a_b a_b \cdot \delta x + p_b a_b b_b \cdot \delta y + p_b a_b \cdot \delta f_o,\\
o &= p_c a_c f_c + p_c a_c a_c \cdot \delta x + p_c a_c b_c \cdot \delta y + p_c a_c \cdot \delta f_o,\\
&\vdots\\
o &= p_n a_n f_n + p_n a_n a_n \cdot \delta x + p_n a_n b_n \cdot \delta y + p_n a_n \cdot \delta f_o,\\
o &= -\frac{[pa]\,[pf]}{[p]} - \frac{[pa]\,[pa]}{[p]}\,\delta x - \frac{[pa]\,[pb]}{[p]}\,\delta y - \frac{[pa]\,[p]}{[p]}\,df_o;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(44)\qquad o &= p_a b_a f_a + p_a a_a b_a \cdot \delta x + p_a b_a b_a \cdot \delta y + p_a b_a \cdot \delta f_o,\\
o &= p_b b_b f_b + p_b a_b b_b \cdot \delta x + p_b b_b b_b \cdot \delta y + p_b b_b \cdot \delta f_o,\\
o &= p_c b_c f_c + p_c a_c b_c \cdot \delta x + p_c b_c b_c \cdot \delta y + p_c b_c \cdot \delta f_o,\\
&\vdots\\
o &= p_n b_n f_n + p_n a_n b_n \cdot \delta x + p_n b_n b_n \cdot \delta y + p_n b_n \cdot \delta f_o,\\
o &= -\frac{[pb]\,[pf]}{[p]} - \frac{[pa]\,[pb]}{[p]}\,\delta x - \frac{[pb]\,[pb]}{[p]}\,\delta y - \frac{[pb]\,[p]}{[p]}\,\delta f_o.
\end{aligned}
$$

Die gruppenweise Addition dieser beiden aus je n + 1 Gleichungen bestehenden Gruppen fürt ebenfalls zu den Normalgleichungen von der Form:

$$(45) \qquad 0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y,$$

$$(46) \qquad 0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y,$$

aus welchen δf_0 eliminirt ist, da in (43):

$$(47) \qquad p_a a_a + p_b a_b + p_c a_c + \ldots + p_n a_n - \frac{[pa]\,[p]}{[p]} = 0,$$

und ebenso in (44):

$$(48) \qquad p_a b_a + p_b b_b + p_c b_c + \ldots + p_n b_n - \frac{[pb]\,[p]}{[p]} = 0$$

ist.

Die Rechnung nach den Formeln (28) bis (32) und (34) bleibt unverändert, wärend statt aus (33) das arithmetische Mittel der Fehler v aus:

$$(49) \qquad v_m = \frac{p_a v_a + p_b v_b + p_c v_c + \ldots + p_n v_n}{[p]}$$

zu bilden ist.

Zur Vergleichung der Quadratsummen der Fehler hat man statt (35) schliefslich

$$(50) \qquad [p\,\mathrm{red}\,vv] < [p\,\mathrm{red}\,ff]$$

oder:

$$[p\,vv] < [p\,ff].$$

Bei den Aufgaben der niederen Geodäsie wird man im Allgemeinen den Ansatz verschiedener Gewichte vermeiden können, indem man, was meistens auch erreichbar sein wird, die Winkelbeobachtung so ausfürt, dass alle Richtungen als gleich genau angesehen werden können. Geht dies in besonderen Fällen nicht wol an, oder machen sonstige Umstände verschiedenen Gewichtsansatz nötig, so wird man die Gewichte oft wenigstens in möglichst einfachen Verhältniszalen annehmen dürfen, etwa zu 1, 2, 3. Geschieht dies, so kann man die einzelnen Fehlergleichungen, je nachdem ihnen das Gewicht 1, 2, 3 zukommt, ein-, zwei- oder dreimal ansetzen und nun die dadurch erhaltenen vermehrten Fehlergleichungen so weiter behandeln, als ob Gewichtsverschiedenheiten nicht beständen. Hierdurch wird die Berücksichtigung der Gewichte auf die möglichst einfachste Form gebracht.

Es ist der mittlere Fehler m einer Richtung:

$$(51) \qquad m = \sqrt{\frac{[\mathrm{red}\,vv]}{n-3}},$$

oder bei verschiedenen Gewichten p der mittlere Fehler einer Richtung vom Gewicht $p = 1$:

$$(52) \qquad m = \sqrt{\frac{[p\,\mathrm{red}\,vv]}{n-3}},$$

wo n die Anzal der Richtungen bezeichnet.

In dem nachstehenden Formular ist die Anwendung der Methode an einem Beispiele erläutert, für welches folgende Koordinaten y, x und Richtungswinkel α gegeben sind:

	y.	x.	α.
P_1	+ 16 955,71	— 20 301,88	0° 0′ 0″
P_2	+ 19 769,40	— 20 021,33	30 57 15
P_3	+ 19 756,65	— 24 832,28	94 21 27
P_4	+ 12 277,45	— 25 432,28	189 47 4
P_5	+ 8 697,63	— 21 397,94	237 31 41
P_6	+ 14 148,28	— 17 650,33	300 57 22

						Zu bestimmender
2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten						$\mathfrak{y} = +15\,962{,}50$ $\mathfrak{x} = -21\,719{,}72$
P.	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
y_n	+16 955,71	+19 769,40	+19 756,65	+12 277,45	+ 8 697,63	+14 148,28
x_n	−20 301,88	−20 021,33	−24 832,28	−25 432,28	−21 397,94	−17 650,33
$y_n-\mathfrak{y}$	+ 993,21	+ 3 806,90	+ 3 794,15	− 3 685,05	− 7 264,87	− 1 814,22
$x_n-\mathfrak{x}$	+ 1 417,84	+ 1 698,39	− 3 112,56	− 3 712,56	+ 321,78	+ 4 069,39
$\log(y_n-\mathfrak{y})$	2. 997 041	3. 580 571	3. 579 115	3. 566 443n	3. 861 228n	3. 258 690n
$\log(x_n-\mathfrak{x})$	3. 151 627	3. 230 037	3. 493 117n	3. 569 673n	2. 507 559	3. 609 529
$\log \operatorname{tg} n_n$	9. 845 414	0. 350 534	0. 085 998n	9. 996 770	1. 353 669n	9. 649 161n
n_n	35°0′41,8″	65°57′24,1″	129°21′50,2″	224°47′13,0″	272°32′10,0″	335°58′18,0″
$\log \sin n_n$	9. 7587	9. 9606	9. 8883	9. 8479n	9. 9996n	9. 6098n
$\log \cos n_n$	9. 9133	9. 6101	9. 8023n	9. 8511n	8. 6459	9. 9606
$cpl \log s_n$	6. 7617	6. 3800	6. 3092	6. 2815	6. 1384	6. 3511
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	1. 8348	1. 6550	1. 5119	1. 4438n	1. 4524n	1. 2753n
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 9894n	1. 3045n	1. 4259	1. 4470	0. 0987n	1. 6261n
a_n	+ 68,4	+ 45,2	+ 32,5	− 27,8	− 28,3	− 18,8
b_n	− 97,6	− 20,2	+ 26,7	+ 28,0	− 1,3	− 42,3
a_m	+ 11,9					
b_m	− 17,8					
5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.						$y = +15\,962{,}86$ $x = -21\,719{,}49$
$\delta n_n = a_n \cdot \delta x$	+ 15,6″	+ 10,3″	+ 7,4″	− 6,3″	− 6,5″	− 4,3″
$\delta n_n = b_n \cdot \delta y$	− 34,8	− 7,2	+ 9,5	+ 10,0	− 0,5	− 15,1
y_n-y	+ 992,85	+ 3 806,54	+ 3 793,79	− 3 685,41	− 7 265,23	− 1 814,58
x_n-x	+ 1 417,61	+ 1 698,16	− 3 112,79	− 3 712,79	+ 321,55	+ 4 069,16
$\log(y_n-y)$	2. 996 884	3. 580 530	3. 579 073	3. 566 486n	3. 861 250n	3. 258 776n
$\log(x_n-x)$	3. 151 557	3. 229 979	3. 493 150n	3. 569 701n	2. 507 249	3. 609 505
$\log \operatorname{tg} \nu_n$	9. 845 327	0. 350 551	0. 085 923n	9. 996 785	1. 354 001n	9. 649 271n
ν_n	35°0′22,4″	65°57′27,1″	129°22′7,7″	224°47′16,5″	272°32′3,1″	335°57′58,6″

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P.* rechts.	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = w - \alpha$. ″		$\chi = -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \chi - \alpha$. ″		*pff.*	*pvv.*
								red f.				red v.		
.	P_1	0	0	0,0	0	0,0	± 0,0	+ 13,8	0	0,0	± 0,0	− 2,0	190	4
.	P_2	30	56	42,3	57	15,0	− 32,7	− 18,9	57	4,7	− 10,3	− 12,3	357	151
.	P_3	94	21	8,4	21	27,0	− 18,6	− 4,8	21	45,3	+ 18,3	+ 16,3	23	266
.	P_4	189	46	31,2	47	4,0	− 32,8	− 19,0	46	54,1	− 9,9	− 11,9	361	142
.	P_5	237	31	28,2	31	41,0	− 12,8	+ 1,0	31	40,7	− 0,3	− 2,3	1	5
.	P_6	300	57	36,2	57	22,0	+ 14,2	+ 28,0	57	36,2	+ 14,2	+ 12,2	784	149
						$f_m =$	− 13,8			$v_m =$	+ 2,0		1716	717

Punkt P : 7.

4. *Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.*

P. links.	*P.* rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
.	P_1	1	+ 56,5	− 79,8	+ 13,8	319	− 451	+ 78	637	− 110
.	P_2	1	+ 33,3	− 2,4	− 18,9	111	− 8	− 63	1	+ 5
.	P_3	1	+ 20,6	+ 44,5	− 4,8	42	+ 92	− 10	198	− 21
.	P_4	1	− 39,7	+ 45,8	− 19,0	158	− 182	+ 75	210	− 87
.	P_5	1	− 40,2	+ 16,5	+ 1,0	162	− 66	− 4	27	+ 2
.	P_6	1	− 30,7	− 24,5	+ 28,0	94	+ 75	− 86	60	− 69
			+ 110,4	+ 106,8	+ 42,8		+ 167	+ 153		+ 7
			− 110,6	− 106,7	− 42,7		− 707	− 163		− 287
			− 0,2	+ 0,1	+ 0,1	886	− 540	− 10	1133	− 280

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad$ $0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = -10 + 886\,\delta x - 540\,\delta y$
B) $0 = -280 - 540\,\delta x + 1133\,\delta y$
} *Normalgleichungen.*

C) $0 = +6 - 540\,\delta x + 329\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = -0{,}609$

D) $0 = +21 - 1860\,\delta x + 1133\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = -2{,}100$

B–C) $0 = -286 + 804\,\delta y$

B–D) $0 = -301 + 1320\,\delta x$

$\delta y = +0{,}356$

$y = +15\,962{,}50$

$y = +15\,962{,}86$

$\delta x = +0{,}228$

$x = -21\,719{,}72$

$x = -21\,719{,}49$

Dem Formular wird zweckmäfsig als 1. Abteilung die Berechnung der genäherten Koordinaten $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{x}$ des Punktes P nach dem Schema des § 1 (Seite 4) vorauszuschicken sein, welche zur Raumersparnis hier nicht mit abgedruckt ist. Für das vorstehende Beispiel sind aus der Kombination der Punkte P_1, P_3, P_6 für P_7:

$$\mathfrak{y} = + 15\,962{,}50, \qquad \mathfrak{x} = - 21\,719{,}72$$

gefunden worden.

In der Abteilung 2 ist die Rechnung nach den Formeln (1) bis (4) und (11), (12) ausgefürt. Die Bildung der Summen $\log \sin n_n + \log \varrho'' + \text{cpl} \log s_n$ zur Berechnung der Hülfsgröfsen a_n wird zweckmäfsig erleichtert, wenn man auf die diesfällige Zalengruppe ein Blättchen Kartenpapier hält, in welches zwei Oeffnungen, um $\log \sin n_n$ und $\text{cpl} \log s_n$ frei hervortreten zu lassen, geschnitten sind, und auf welches zwischen den beiden Oeffnungen $\log \varrho'' = 5.3144$ für alte Kreisteilung oder 5.8039 für neue Kreisteilung geschrieben ist. Man wird dann

$\log \sin n_n$
$\log \varrho''$
$\text{cpl} \log s_n$

übersichtlich vor Augen haben und bequem zusammenaddiren können. Zur Bildung der Summen $\log \cos n_n + \log (-\varrho'') + \text{cpl} \log s_n$ behufs Berechnung der Hülfsgröfsen b_n wird an einer anderen Stelle des Blättchens auf dessen unteren Rand 5.3144_n beziehungsweise 5.8039_n geschrieben und mit dem Blättchen $\log \sin \nu_n$ so verdeckt, dass

$\log (-\varrho'')$
$\log \cos n_n$
$\text{cpl} \log s_n$

unter einander erscheinen. Bedient man sich vorgedruckter Rechenschema's mit vorgezeichneten Zeilenlinien, so werden derartige Blättchen immer genau der Zalenstellung entsprechen.

Nachdem darauf in der 3. Abteilung die Winkel w, sowie die Fehler f und red f nach (7), (8), (13) (16) gebildet worden, folgt in Abteilung 4 die Formirung und Auflösung der Normalgleichungen nach Formel (14) bis (20) in schematischer Uebersichtlichkeit. Die Spalten a, b und f enthalten die reduzirten Koëffizienten und Fehler nach (14), (15), (16); die Letzteren sind aus Abteilung 3 entnommen, die beiden Ersteren aber dadurch gebildet worden, dass von den in der Abteilung 2 berechneten ursprünglichen Koëffizienten a und b deren ebendaselbst formirte arithmetische Mittel a_m, b_m subtrahirt sind. In der algebraischen Summe einer jeden der Spalten a, b, f ergibt sich eine Rechenprobe, indem jede Summe, abgesehen von den durch die Abrundungen der letzten Ziffernstellen von a_m, b_m, f_m bedingten kleinen Abweichungen, $= o$ sein muss. Für die richtige Berechnung der δy, δx erhält man eine Probe, wenn man die gefundenen Werte in die Normalgleichungen einsetzt, welche damit ebenfalls $= o$ werden müssen. Die in dieser Abteilung vorkommenden Multiplikationen und Divisionen werden durch den Gebrauch von Crelle's Rechentafeln wesentlich erleichtert. Bei der Bildung der Produkte paa, pab, paf, pbb, pbf ist eine entsprechende Kürzung derselben durch Stellenabstreichen unbedenklich. In obigen Beispielen ist aufser den Dezimalstellen auch noch die Einerstelle abgeworfen.

Die Rechnung wendet sich nunmehr zur Abteilung 5, in welcher zuerst die Neigungsverbesserungen $\delta n_n = a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y$ (mit Crelle's Rechentafeln) nach den Formeln (29) berechnet werden. Dann folgt die Berechnung der definitiven Neigungen ν_n aus $\text{tg}\, \nu_n = \frac{y_n - y}{x_n - x}$ (Formel 30), deren Richtigkeit aus den algebraischen Summen $n_n + a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y$ sofort erprobt wird. Die Probe wird in den Dezimalen der Sekunden kleine Abweichungen ergeben, welche teils in der unvermeidlichen Ungenauigkeit der letzten Logarithmenstellen, teils in der Abrundung der in Rech-

nung gestellten definitiven Koordinaten y, x auf volle Centimeter ihre Veranlassung finden. Die Berechnung aus $\operatorname{tg} \nu_n = \frac{y_n - y}{x_n - x}$ wird als die mafsgebende angesehen, da die abgerundeten Koordinaten das eigentliche Schlussergebnis der Rechnung bilden, und hiermit die definitiven Neigungen harmoniren müssen.

Endlich werden in der Abteilung 3 noch nach Formel (31) bis (34) die bestehen gebliebenen Fehler v_n und red v_n gebildet, auch die Quadrate der ursprünglichen Fehler red f_n und die Quadrate der bestehen gebliebenen Fehler red v_n formirt und je für sich summirt, wobei die letztere Quadratsumme kleiner sein muss als die erstere.

Die Rechnung ist, da die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate eine schärfere Behandlung angezeigt erscheinen lässt, nicht mit fünfstelligen, sondern mit sechsstelligen Logarithmen ausgefürt, ausgenommen die Berechnung der Hülfsgröfsen $a_n = \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$ und $b_n = -\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}$, welche mit vierstelligen Logarithmen erfolgt ist. Notwendig wird dies für die niedere Geodäsie aber nicht sein, vielmehr werden fünfstellige beziehungsweise dreistellige Logarithmen ausreichen, one dass man eine merkbare Beeinträchtigung der Genauigkeit der Ergebnisse zu befürchten hätte.

Wäre den Richtungen verschiedenes Gewicht, z. B. $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p_4 = 2$, $p_5 = p_6 = 3$ beizulegen gewesen, so hätte sich, nachdem zuvor aus (37), (38), (39) $a_m = -1{,}5$, $b_m = -11{,}6$, $f_m = -10{,}9$ gefunden worden, nach der auf Seite 47 angedeuteten einfachsten Form der Gewichtsberücksichtigung die Formirung der Normalgleichungen in Abteilung 4 folgendermafsen gestaltet:

P.	p.	a.	b.	f.	paa.	pab.	paf.	pbb.	pbf.
P_1	1	+ 69,9	− 86,0	+ 10,9	489	− 601	+ 76	740	− 94
P_2	1	+ 46,7	− 8,6	− 21,8	218	− 40	− 102	7	+ 19
P_3	1	+ 34,0	+ 38,3	− 7,7	116	+ 130	− 26	147	− 29
	1	+ 34,0	+ 38,3	− 7,7	116	+ 130	− 26	147	− 29
P_4	1	− 26,3	+ 39,6	− 21,9	69	− 104	+ 58	157	− 87
	1	− 26,3	+ 39,6	− 21,9	69	− 104	+ 58	157	− 87
P_5	1	− 26,8	+ 10,3	− 1,9	72	− 28	+ 5	11	− 2
	1	− 26,8	+ 10,3	− 1,9	72	− 28	+ 5	11	− 2
	1	− 26,8	+ 10,3	− 1,9	72	− 28	+ 5	11	− 2
P_6	1	− 17,3	− 30,7	+ 25,1	30	+ 53	− 43	94	− 77
	1	− 17,3	− 30,7	+ 25,1	30	+ 53	− 43	94	− 77
	1	− 17,3	− 30,7	+ 25,1	30	+ 53	− 43	94	− 77
	12	− 0,3	0,0	− 0,5	1383	− 514	− 76	1670	− 544

Hiermit würde man die Normalgleichungen

$$0 = -76 + 1383\,\delta y - 514\,\delta y$$
$$0 = -544 - 514\,\delta x + 1670\,\delta y$$

erhalten haben, deren Auflösung ergeben hätte . . . . . $\delta y = +0{,}387$ | $\delta x = +0{,}199$

Es war . . . . . $y = +15\,962{,}50$ | $x = -21\,719{,}72$

mithin . . . . . $y = +15\,962{,}89$ | $y = -21\,719{,}52$.

Die Eintragungen in den Abteilungen 5 und 3 des Rechenformulars auf Seite 48 würden sich, wie folgt, geändert haben:

5. Berechnung der Neigungen ν. — $y = +\ 15\,962{,}89$, $x = -\ 21\,719{,}52$

	P_1.	P_2.	P_3.	P_4.	P_5.	P_6.
$\delta n_n = \begin{cases} a_n \cdot \delta x \\ b_n \cdot \delta y \end{cases}$	$+\ 13{,}6''$ $-\ 37{,}8$	$+\ 9{,}0''$ $-\ 7{,}8$	$+\ 6{,}5''$ $+\ 10{,}3$	$-\ 5{,}5''$ $+\ 10{,}8$	$-\ 5{,}6$ $-\ 0{,}5$	$-\ 3{,}7''$ $-\ 16{,}4$
$y_n - y$	$+\ 992{,}82$	$+\ 3\,806{,}51$	$+\ 3\,793{,}76$	$-\ 3\,685{,}44$	$-\ 7\,265{,}26$	$-\ 1\,814{,}61$
$x_n - x$	$+\ 1\,417{,}64$	$+\ 1\,698{,}19$	$-\ 3\,112{,}76$	$-\ 3\,712{,}76$	$+\ 321{,}58$	$+\ 4\,069{,}19$
$\log (y_n - y)$	2. 996 871	3. 580 527	3. 579 070	3. 566 489n	3. 861 252n	3. 258 783n
$\log (x_n - x)$	3. 151 566	3. 229 986	3. 493 145n	3. 569 697n	2. 507 289	3. 609 508
$\log \operatorname{tg} \nu_n$	9. 845 305	0. 350 541	0. 085 925n	9. 996 792	1. 353 963n	9. 649 275n
ν_n	35° 0′ 17,5″	65° 57′ 25,4″	129° 22′ 7,2″	274° 47′ 18,1″	272° 32′ 3,9″	335° 57′ 57,9″

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	P. rechts.	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = w - \alpha$. ″	red f.	$\chi = -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \chi - \alpha$. ″	red v.	pff.	pvv.
.	P_1	0	0	0,0	0	0,0	$\pm\ 0{,}0$	$+\ 10{,}9$	0	0,0	$\pm\ 0{,}0$	$-\ 8{,}6$	119	74
.	P_2	30	56	42,3	57	15,0	$-\ 32{,}7$	$-\ 21{,}8$	57	7,9	$-\ 7{,}1$	$-\ 15{,}7$	475	246
.	P_3	94	21	8,4	21	27,0	$-\ 18{,}6$	$-\ 7{,}7$	21	49,7	$+\ 22{,}7$	$+\ 14{,}1$	59	199
							$-\ 18{,}6$	$-\ 7{,}7$			$+\ 22{,}7$	$+\ 14{,}1$	59	199
.	P_4	189	46	31,2	47	4,0	$-\ 32{,}8$	$-\ 21{,}9$	47	0,6	$-\ 3{,}4$	$-\ 12{,}0$	480	144
							$-\ 32{,}8$	$-\ 21{,}9$			$-\ 3{,}4$	$-\ 12{,}0$	480	144
.	P_5	237	31	28,2	31	41,0	$-\ 12{,}8$	$-\ 1{,}9$	31	46,4	$+\ 5{,}4$	$-\ 3{,}2$	4	10
							$-\ 12{,}8$	$-\ 1{,}9$			$+\ 5{,}4$	$-\ 3{,}2$	4	10
							$-\ 12{,}8$	$-\ 1{,}9$			$+\ 5{,}4$	$-\ 3{,}2$	4	10
.	P_6	300	57	36,2	57	22,0	$+\ 14{,}2$	$+\ 25{,}1$	57	40,4	$+\ 18{,}4$	$+\ 9{,}8$	630	96
							$+\ 14{,}2$	$+\ 25{,}1$			$+\ 18{,}4$	$+\ 9{,}8$	630	96
							$+\ 14{,}2$	$+\ 25{,}1$			$+\ 18{,}4$	$+\ 9{,}8$	630	96
						$f_m =$	$-\ 10{,}9$			$v_m =$	$+\ 8{,}6$		3574	1324

§ 6.

Wenn unabhängige Winkelbeobachtungen (§ 5, Seite 40 zu II) vorliegen, so ist bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens zunächst ebenfalls nach den Formeln (1) bis (6) des § 5 zu verfaren. Weiter muss nun aber die Bildung der Fehler f ganz mit Rücksicht auf die Winkelbeobachtung erfolgen in der Weise, dass aus den genäherten Neigungen

n_a, n_b, n_c, ..., n_n die den gemessenen Winkeln entsprechenden Winkel w durch Subtraktion der Neigung des linken Schenkels von der Neigung des rechten *) Schenkels gebildet und hiervon die bezüglichen gemessenen Winkel α subtrahirt werden, was die Fehler f ergibt, deren Quadratsumme zu einem Minimum gemacht werden soll.

Ist beispielsweise für die Winkelbeobachtungen eine und dieselbe Nullrichtung P_a angenommen worden, so dass also auf P die Winkel zwischen P_a und $P_b = \alpha_a^b$, zwischen P_a und $P_c = \alpha_a^c$, zwischen P_a und $P_d = \alpha_a^d$, ..., zwischen P_a und $P_n = \alpha_a^n$ gemessen sind, so wird man erst die den gemessenen Winkeln α_a^b, α_a^c, α_a^d, ..., α_a^n entsprechenden Winkel:

$$(1)\qquad \begin{aligned} w_a^b &= -n_a + n_b,\\ w_a^c &= -n_a + n_c,\\ w_a^d &= -n_a + n_d,\\ &\vdots\\ w_a^n &= -n_a + n_n, \end{aligned}$$

und dann die Fehler:

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_a^b &= w_a^b - \alpha_a^b,\\ f_a^c &= w_a^c - \alpha_a^c,\\ f_a^d &= w_a^d - \alpha_a^d,\\ &\vdots\\ f_a^n &= w_a^n - \alpha_a^n \end{aligned}$$

bilden. Wären dagegen beispielsweise die Winkel zwischen P_a und $P_b = \alpha_a^b$, zwischen P_b und $P_c = \alpha_b^c$, zwischen P_c und $P_d = \alpha_c^d$, ..., zwischen P_{n-1} und $P_n = \alpha_{n-1}^n$, zwischen P_n und $P_a = \alpha_n^a$ gemessen, so würde man — vorausgesetzt, dass diese Winkel nicht zuvor im Horizontabschluss auf ihren Sollbetrag von 2π ausgeglichen, mithin nach den Erläuterungen auf Seite 41 nicht in gegenseitige Abhängigkeit von einander gebracht sind — die Differenzen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} w_a^b &= -n_a + n_b,\\ w_b^c &= -n_b + n_c,\\ w_c^d &= -n_c + n_d,\\ &\vdots\\ w_{n-1}^n &= -n_{n-1} + n_n,\\ w_n^a &= -n_n + n_a, \end{aligned}$$

oder allgemein ausgedrückt:

$$w_l^r = -n_l + n_r,$$

wo die Indices l und r die Richtungen links und rechts bezeichnen; endlich damit die Fehler:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f_a^b &= w_a^b - \alpha_a^b,\\ f_b^c &= w_b^c - \alpha_b^c,\\ f_c^d &= w_c^d - \alpha_c^d,\\ &\vdots\\ f_{n-1}^n &= w_{n-1}^n - \alpha_{n-1}^n,\\ f_n^a &= w_n^a - \alpha_n^a \end{aligned}$$

zu formiren haben.

Ganz konform den Fehlern f sind weiter die Differenzen der nach Formel (3) und (4) beziehungsweise (5) und (6) im § 5 berechneten Hülfsgröfsen a und b der-

---

*) Die Winkel sind hier, wie allgemein in dem vorliegenden Schriftchen und in des Verfassers „Trigon. und polygon. Rechnungen" geschehen, durch die Schenkeldrehung von links nach rechts entstanden gedacht.

jenigen Stralen zu bilden, welche die betreffenden gemessenen Winkel einschliefsen. So gehören beispielsweise zu den obigen Fehlern unter (2) die Differenzen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} a_a^b &= -a_a + a_b,\\ a_a^c &= -a_a + a_c,\\ a_a^d &= -a_a + a_d,\\ &\vdots\\ a_a^n &= -a_a + a_n; \end{aligned} \qquad (6)\qquad \begin{aligned} b_a^b &= -b_a + b_b,\\ b_a^c &= -b_a + b_c,\\ b_a^d &= -b_a + b_d,\\ &\vdots\\ b_a^n &= -b_a + b_n; \end{aligned}$$

zu den obigen Fehlern unter (4) die Differenzen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} a_a^b &= -a_a + a_b,\\ a_b^c &= -a_b + a_c,\\ a_c^d &= -a_c + a_d,\\ &\vdots\\ a_{n-1}^n &= -a_{n-1} + a_n,\\ a_n^a &= -a_n + a_a; \end{aligned} \qquad (8)\qquad \begin{aligned} b_a^b &= -b_a + b_b,\\ b_b^c &= -b_b + b_c,\\ b_c^d &= -b_c + b_d,\\ &\vdots\\ b_{n-1}^n &= -b_{n-1} + b_n,\\ b_n^a &= -b_n + b_a. \end{aligned}$$

Diese Differenzen gehen als Koëffizienten der Unbekannten δx, δy in die Fehlergleichungen über, welche in der Voraussetzung, dass allen Winkeln gleiche Genauigkeit beiwont, beispielsweise in dem Falle der Formeln (2), (5), (6) folgende:

$$(9)\qquad \begin{aligned} o &= f_a^b + a_a^b \cdot \delta x + b_a^b \cdot \delta y,\\ o &= f_a^c + a_a^c \cdot \delta x + b_a^c \cdot \delta y,\\ o &= f_a^d + a_a^d \cdot \delta x + b_a^d \cdot \delta y,\\ &\vdots\\ o &= f_a^n + a_a^n \cdot \delta x + b_a^n \cdot \delta y; \end{aligned}$$

in dem Falle der Formeln (4), (7), (8) folgende:

$$(10)\qquad \begin{aligned} o &= f_a^b + a_a^b \cdot \delta x + b_a^b \cdot \delta y,\\ o &= f_b^c + a_b^c \cdot \delta x + b_b^c \cdot \delta y,\\ o &= f_c^d + a_c^d \cdot \delta x + b_c^d \cdot \delta y,\\ &\vdots\\ o &= f_{n-1}^n + a_{n-1}^n \cdot \delta x + b_{n-1}^n \cdot \delta y,\\ o &= f_n^a + a_n^a \cdot \delta x + b_n^a \cdot \delta y \end{aligned}$$

sein werden. Die Zal der Fehlergleichungen wird gleich der Zal der gemessenen Winkel sein. Die Unbekannte δf_o, welche bei abhängigen Richtungsbeobachtungen (§ 5) als Orientirungsfehler in die Fehlergleichungen einzusetzen ist, kommt bei unabhängigen Winkelbeobachtungen in Wegfall.

Die Behandlung der Fehlergleichungen erfolgt ganz wie im § 5 an Formel (10), (17), (18) gezeigt worden, wodurch die Normalgleichungen von der allgemeinen Form:

$$(11)\qquad o = [af] + [aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y,$$

$$(12)\qquad o = [bf] + [ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y$$

erhalten werden.

Nachdem hieraus δy und δx und damit y und x gefunden sind, ergeben sich die Verbesserungen δn_a, δn_b, δn_c, ..., δn_n der vorläufigen Neigungen, sowie die definitiven Neigungen $\nu_a = n_a + \delta n_a$, $\nu_b = n_b + \delta n_b$, $\nu_c = n_c + \delta n_c$, ..., $\nu_n = n_n + \delta n_n$ nach den Formeln (28) bis (30) des § 5.

Durch die Subtraktion der definitiven Neigungen ν der linken Winkelschenkel von denjenigen der rechten Schenkel erhält man die den gemessenen Winkeln α entsprechenden ausgeglichenen Winkel χ, und durch Subtraktion der gemessenen Winkel α von den ausgeglichenen Winkeln χ die warscheinlichsten Verbesserungen v der gemessenen Winkel, deren Quadratsumme [vv] ein Minimum ergeben muss.

Wont den gemessenen Winkeln verschiedenes Gewicht bei, so gehen die Fehlergleichungen beispielsweise unter (9) über in:

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad o &= p_a^b f_a^b + p_a^b a_a^b \cdot \delta x + p_a^b b_a^b \cdot \delta y,\\
o &= p_a^c f_a^c + p_a^c a_a^c \cdot \delta x + p_a^c b_a^c \cdot \delta y,\\
o &= p_a^d f_a^d + p_a^d a_a^d \cdot \delta x + p_a^d b_a^d \cdot \delta y,\\
&\vdots\\
o &= p_a^n f_a^n + p_a^n a_a^n \cdot \delta x + p_a^n b_a^n \cdot \delta y,
\end{aligned}
$$

und die Normalgleichungen (11) und (12) in:

$$(14) \qquad o = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y,$$

$$(15) \qquad o = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$$

Der mittlere Fehler eines Winkels ist:

$$(16) \qquad m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}.$$

Bei verschiedenen Gewichten p ist der mittlere Fehler eines Winkels vom Gewicht $p = 1$:

$$(17) \qquad m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}},$$

unter n die Anzal der gemessenen Winkel verstanden:

In den nachstehenden beiden Formularen ist, um den Unterschied der Behandlungsweise deutlich hervortreten zu lassen, das Beispiel des § 5 mit der Abänderung widerholt, dass demselben das erste Mal die Winkel:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= 30^\circ\ 57'\ 15''\\
\alpha_1^3 &= 94\ \ 21\ \ 27\\
\alpha_1^4 &= 189\ \ 47\ \ \ 4\\
\alpha_1^5 &= 237\ \ 31\ \ 41\\
\alpha_1^6 &= 300\ \ 57\ \ 22,
\end{aligned}
$$

und zwar sämmtlich mit gleichen Gewichten, das zweite Mal die Winkel:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= 30^\circ\ 57'\ 17''\ \text{mit dem Gewichte } 1\\
\alpha_2^3 &= 63\ \ 24\ \ 14\ \ \text{„ „ „ } 1\\
\alpha_3^4 &= 95\ \ 25\ \ 38\ \ \text{„ „ „ } 2\\
\alpha_3^5 &= 143\ \ 10\ \ 15\ \ \text{„ „ „ } 2\\
\alpha_3^6 &= 206\ \ 35\ \ 57\ \ \text{„ „ „ } 2\\
\alpha_6^1 &= 59\ \ \ 2\ \ 40\ \ \text{„ „ „ } 1
\end{aligned}
$$

als gemessene unabhängige Winkel zu Grunde gelegt sind:

Zu bestimmender

2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten	$y = +15\,962{,}50$ $x = -21\,719{,}72$

P.	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
y_n	+16 955,71	+19 769,40	+19 756,65	+12 277,45	+ 8 697,63	+14 148,28
x_n	−20 301,88	−20 021,33	−24 832,28	−25 432,28	−21 397,94	−17 650,33
$y_n - y$	+ 993,21	+ 3 806,90	+ 3 794,15	− 3 685,05	− 7 264,87	− 1 814,22
$x_n - x$	+ 1 417,84	+ 1 698,39	− 3 112,56	− 3 712,56	+ 321,78	+ 4 069,39
$\log (y_n - y)$	2. 997 041	3. 580 571	3. 579 115	3. 566 443n	3. 861 228n	3. 258 690n
$\log (x_n - x)$	3. 151 627	3. 230 037	3. 493 117n	3. 569 673n	2. 507 559	3. 609 529
$\log tg\, n_n$	9. 845 414	0. 350 534	0. 085 998n	9. 996 770	1. 353 669n	9. 649 161n
n_n	35°0′41,8″	65°57′24,1″	129°21′50,2″	224°47′13,0″	272°32′10,0″	335°58′18,0″
$\log \sin n_n$	9. 7587	9. 9606	9. 8883	9. 8479n	9. 9996n	9. 6098n
$\log \cos n_n$	9. 9133	9. 6101	9. 8023n	9. 8511n	8. 6459	9. 9606
$cpl \log s_n$	6. 7617	6. 3800	6. 3092	6. 2815	6. 1384	6. 3511
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	1. 8348	1. 6550	1. 5119	1. 4438n	1. 4524n	1. 2753n
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 9894n	1. 3045n	1. 4259	1. 4470	0. 0987n	1. 6261n
a_n	+68,4	+45,2	+32,5	−27,8	−28,3	−18,8
b_n	−97,6	−20,2	+26,7	+28,0	− 1,3	−42,3

5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.	$y = +15\,962{,}84$ $x = -21\,719{,}49$

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
$\delta n_n = a_n \cdot \delta x$	+ 15,9″	+ 10,5″	+ 7,6″	− 6,5″	− 6,6″	− 4,4″
$\delta n_n = b_n \cdot \delta y$	− 33,6	− 6,9	+ 9,2	+ 9,6	− 0,4	− 14,6
$y_n - y$	+ 992,87	+ 3 806,56	+ 3 793,81	− 3 685,39	− 7 265,21	− 1 814,56
$x_n - x$	+ 1 417,61	+ 1 698,16	− 3 112,79	− 3 712,79	+ 321,55	+ 4 069,16
$\log (y_n - y)$	2. 996 892	3. 580 533	3. 579 075	3. 566 484n	3. 861 249n	3. 258 771n
$\log (x_n - x)$	3. 151 557	3. 229 979	3. 493 150n	3. 569 701n	2. 507 249	3. 609 505
$\log tg\, \nu_n$	9. 845 335	0. 350 554	0. 085 925n	9. 996 783	1. 354 000n	9. 649 266n
ν_n	35°0′24,2″	65°57′27,7″	129°22′7,2″	224°47′16,2″	272°32′3,1″	335°57′59,5″

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P.* rechts.	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	a. ′	″	$f = w - a$. ″	$\chi = -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \chi - a$. ″	*pff.*	*pvv.*
P_1	P_2	30	56	42,3	57	15,0	− 32,7	57	3,5	− 11,5	1069	132
P_1	P_3	94	21	8,4	21	27,0	− 18,6	21	43,0	+ 16,0	346	256
P_1	P_4	189	46	31,2	47	4,0	− 32,8	46	51,8	− 12,2	1076	149
P_1	P_5	237	31	28,2	31	41,0	− 12,8	31	38,9	− 2,1	164	4
P_1	P_6	300	57	36,2	57	22,0	+ 14,2	57	35,3	+ 13,3	202	177
											2857	718

Punkt P: 7.

4. *Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.*

P. links.	rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
P_1	P_2	1	− 23,2	+ 77,4	− 32,7	54	− 180	+ 76	599	− 253
P_1	P_3	1	− 35,9	+124,3	− 18,6	129	− 446	+ 67	1545	− 231
P_1	P_4	1	− 96,2	+125,6	− 32,8	925	− 1208	+ 316	1578	− 412
P_1	P_5	1	− 96,7	+ 96,3	− 12,8	935	− 931	+ 124	927	− 123
P_1	P_6	1	− 87,2	+ 55,3	+ 14,2	760	− 482	− 124	306	+ 79
						2803	− 3247	+ 459	4955	− 940

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad$ $0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = +46 + 280\,\delta x - 325\,\delta y$
B) $0 = -94 - 325\,\delta x + 496\,\delta y$
} *Normalgleichungen.*

C) $0 = -53 - 325\,\delta x + 377\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = -1{,}161$

D) $0 = -70 - 428\,\delta x + 496\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = -1{,}526$

B–C) $0 = -41 + 119\,\delta y$

B–D) $0 = -24 + 103\,\delta x$

$\delta y = +\ 0{,}344$

$y = +\ 15\,962{,}50$

$y = +\ 15\,962{,}84$

$\delta x = +\ 0{,}233$

$x = -\ 21\,719{,}72$

$x = -\ 21\,719{,}49$

						Zu bestimmender
2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten						$\mathfrak{y} = +15\,962{,}50$ $\mathfrak{x} = -21\,719{,}72$
P.	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
y_n	+16 955,71	+19 769,40	+19 756,65	+12 277,45	+ 8 697,63	+14 148,28
x_n	−20 301,88	−20 021,33	−24 832,28	−25 432,28	−21 397,94	−17 650,33
$y_n-\mathfrak{y}$	+ 993,21	+ 3 806,90	+ 3 794,15	− 3 685,05	− 7 264,87	− 1 814,22
$x_n-\mathfrak{x}$	+ 1 417,84	+ 1 698,39	− 3 112,56	− 3 712,56	+ 321,78	+ 4 069,39
$\log(y_n-\mathfrak{y})$	2. 997 041	3. 580 571	3. 579 115	3. 566 443n	3. 861 228n	3. 258 690n
$\log(x_n-\mathfrak{x})$	3. 151 627	3. 230 037	3. 493 117n	3. 569 673n	2. 507 559	3. 609 529
$\log tg\, n_n$	9. 845 414	0. 350 534	0. 085 998n	9. 996 770	1. 353 669n	9. 649 161n
n_n	35°0′41,8″	65°57′24,1″	129°21′50,2″	224°47′13,0″	272°32′10,0″	335°58′18,0″
$\log \sin n_n$	9. 7587	9. 9606	9. 8883	9. 8479n	9. 9996n	9. 6098n
$\log \cos n_n$	9. 9133	9. 6101	9. 8023n	9. 8511n	8. 6459	9. 9606
$cpl \log s_n$	9. 7617	6. 3800	6. 3092	6. 2815	6. 1384	6. 3511
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	1. 8348	1. 6550	1. 5119	1. 4438n	1. 4524n	1. 2753n
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 9894n	1. 3045n	1. 4259	1. 4470	0. 0987n	1. 6261n
a_n	+ 68,4	+ 45,2	+ 32,5	− 27,8	− 28,3	− 18,8
b_n	− 97,6	− 20,2	+ 26,7	+ 28,0	− 1,3	− 42,3
5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.						$y = +15\,962{,}75$ $x = -21\,719{,}65$
$\delta n_n = a_n \cdot \delta x$	+ 4,7″	+ 3,1″	+ 2,2″	− 1,9″	− 1,9″	− 1,3″
$\delta n_n = b_n \cdot \delta y$	− 24,4	− 5,0	+ 6,7	+ 7,0	− 0,3	− 10,6
y_n-y	+ 992,96	+ 3 806,65	+ 3 793,90	− 3 685,30	− 7 265,12	− 1 814,47
x_n-x	+ 1 417,77	+ 1 698,32	− 3 112,63	− 3 712,63	+ 321,71	+ 4 069,32
$\log(y_n-y)$	2. 996 932	3. 580 543	3. 579 086	3. 566 473n	3. 861 243n	3. 258 750n
$\log(x_n-x)$	3. 151 606	3. 230 019	3. 493 127n	3. 569 682n	2. 507 465	3. 609 522
$\log tg\, \nu_n$	9. 845 326	0. 350 524	0. 085 959n	9. 996 791	1. 353 778n	9. 649 228n
ν_n	35°0′22,2″	65°57′22,3″	129°21′59,3″	224°47′17,9″	272°32′7,8″	335°58′6,1″

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P.* rechts.	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = w - \alpha$. ″	$\chi = -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \chi - \alpha$. ″	*pff.*	*pvv.*
P_6	P_1	59	2	23,8	2	40,0	− 16,2	2	16,1	− 23,9	262	571
P_1	P_2	30	56	42,3	57	17,0	− 34,7	57	0,1	− 16,9	1204	286
P_2	P_3	63	24	26,1	24	14,0	+ 12,1	24	37,0	+ 23,0	146	529
P_3	P_4	95	25	22,8	25	38,0	− 15,2	25	18,6	− 19,4	231 231	376 376
P_3	P_5	143	10	19,8	10	15,0	+ 4,8	10	8,5	− 6,5	23 23	42 42
P_3	P_6	206	36	27,8	35	57,0	+ 30,8	36	6,8	+ 9,8	949 949	96 96
											4018	2414

Punkt P : 7.

4. Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.

P. links.	rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
P_6	P_1	1	+ 87,2	− 55,3	− 16,2	760	− 482	− 141	306	+ 90
P_1	P_2	1	− 23,2	+ 77,4	− 34,7	54	− 180	+ 81	599	− 269
P_2	P_3	1	− 12,7	+ 46,9	+ 12,1	16	− 60	− 15	220	+ 57
P_3	P_4	2	− 60,3	+ 1,3	− 15,2	364	− 8	+ 92	0	− 2
						364	− 8	+ 92	0	− 2
P_3	P_5	2	− 60,8	− 28,0	+ 4,8	370	+ 170	− 29	78	− 13
						370	+ 170	− 29	78	− 13
P_3	P_6	2	− 51,3	− 69,0	+ 30,8	263	+ 354	− 158	476	− 213
						263	+ 354	− 158	476	− 213
							+ 1048	+ 265		+ 147
							− 738	− 530		− 725
						2824	+ 310	− 265	2233	− 578

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad$ $0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = -27 + 282\,\delta x + 31\,\delta y$
B) $0 = -58 + 31\,\delta x + 223\,\delta y$
} *Normalgleichungen.*

C) $0 = -3 + 31\,\delta x + 3\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = +0{,}110$

D) $0 = -194 + 2028\,\delta x + 223\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = +7{,}19$

B–C) $0 = -55 + 220\,\delta y$
B–D) $0 = +136 - 1997\,\delta x$

$\delta y = +0{,}250$
$y = +15\,962{,}50$
$y = +15\,962{,}75$

$\delta x = +0{,}068$
$x = -21\,719{,}72$
$x = -21\,719{,}65$

Die vorstehenden Beispiele sind, um die Wirkung der Methode deutlich zur Anschauung zu bringen, absichtlich so gewält, dass sie erhebliche Fehler v hervortreten lassen.

§ 7.

Nachdem in den §§ 5 und 6 für das Rückwärtseinschneiden die Ausgleichung der unvermeidlichen Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate gezeigt worden, möge nun dieselbe Methode noch auf die im § 4 mit Hülfe der graphischen Darstellung der Schnittfiguren behandelte Aufgabe des „Einschneidens“, und zwar in einer Weise angewendet worden, wie sie für die Zwecke der niederen Geodäsie auch für die wichtigeren Punkte wol jederzeit als ausreichend auzusehen sein wird.

Wird hier zunächst der einfachste Fall, nämlich das Vorwärtseinschneiden, betrachtet, bei welchem auf dem zu bestimmendem Punkte P eine Winkelmessung überhaupt nicht stattgefunden hat, sondern die bestimmenden Stralen nur auf ihrem anderen Endpunkte beobachtet worden sind, so wird man zunächst die Stralenneigungen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \ldots, \varphi_n$ ganz so, wie es in § 4 gezeigt worden, herleiten.

Weiter hat man, wie in Abteilung 2 der Rechenformulare des § 4 geschehen, aus den Neigungen φ zweier günstiger Stralen die angenäherten Koordinaten $\mathfrak{y}, \mathfrak{x}$ für den Punkt P zu berechnen.

Nun sind ganz nach den Formeln (1) bis (6) des § 5 die genäherten Neigungen n, die reziproken Werte $\frac{1}{s}$ der Stralenlängen, sowie die Hülfsgröfsen a und b zu berechnen.

In der Differenz der Neigungen n und φ findet man die bestehenden Fehler, nämlich:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_a &= n_a - \varphi_a \pm \pi, \\ f_b &= n_b - \varphi_b \pm \pi, \\ f_c &= n_c - \varphi_c \pm \pi, \\ &\vdots \\ f_n &= n_n - \varphi_n \pm \pi, \end{aligned}$$

und erhält dann die Fehlergleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} o &= f_a + a_a \cdot \delta x + b_a \cdot \delta y, \\ o &= f_b + a_b \cdot \delta x + b_b \cdot \delta y, \\ o &= f_c + a_c \cdot \delta x + b_c \cdot \delta y, \\ &\vdots \\ o &= f_n + a_n \cdot \delta x + b_n \cdot \delta y. \end{aligned}$$

Hieraus werden so, wie ebenfalls in § 5 an Formal (10), (17) bis (20) gezeigt worden, durch Multiplikation mit den Koëffizienten von δx, δy und durch gruppenweise Addition die Normalgleichungen:

$$(3)\qquad o = [af] + [aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y,$$

$$(4)\qquad o = [bf] + [ab]\,\delta x + [bb]\,\delta y,$$

und daraus die den angenäherten Koordinaten $\mathfrak{y}, \mathfrak{x}$ beizufügenden Verbesserungen δy, δx, sowie endlich die definitiven Koordinaten selbst:

$$(5)\qquad y = \mathfrak{y} + \delta y, \qquad (6)\qquad x = \mathfrak{x} + \delta x$$

gefunden.

Sind verschiedene Gewichte $p_a, p_b, p_c, \ldots, p_n$ der Stralenlängen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \ldots, \varphi_n$ zu berücksichtigen, so erhalten die Fehler- und Normalgleichungen die unter (40) und (41) im § 5 bezeichnete Gestalt.

Die den definitiven Koordinaten entsprechenden definitiven Neigungen ν ergeben sich hier widerum nach (28) bis (30) im § 5.

Dagegen sind die durch die definitiven Koordinaten erzielten Verbesserungen der aus den gemessenen Winkeln hergeleiteten Neigungen φ_a, φ_b, φ_c, . . . , φ_n oder, was dasselbe bedeutet, die bestehen gebliebenen Fehler:

$$
\begin{aligned}
v_a &= \nu_a - \varphi_a \pm \pi = f_a + \delta n_a, \\
v_b &= \nu_b - \varphi_b \pm \pi = f_b + \delta n_b, \\
v_c &= \nu_c - \varphi_c \pm \pi = f_c + \delta n_c, \\
&\vdots \\
v_n &= \nu_n - \varphi_n \pm \pi = f_n + \delta n_n.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Die Quadratsumme [vv] dieser Werte, oder bei verschiedenen Gewichten p die Summe [pvv] muss nach den Voraussetzungen der Methode ein Minimum, d. h. so klein als möglich sein, und man hat als Rechenprobe:

$$[vv] < [ff], \tag{8}$$

oder:

$$[pvv] < [pff]. \tag{9}$$

Der mittlere Fehler m einer Stralenneigung φ ist hier:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}}; \tag{10}$$

bei verschiedenen Gewichten p der mittlere Fehler m einer Stralenneigung vom Gewichte $p = 1$:

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}}, \tag{11}$$

wo unter n die Anzal der Stralen zu verstehen ist.

Für den weiteren Fall, dass aufser auf gegebenen Punkten auch auf dem zu bestimmenden Punkte P eine Winkelbeobachtung stattgefunden hat, bleibt die Ableitung der Neigungen φ und die Formirung der Fehlergleichungen für dieselben unverändert so, wie sie vorstehend erläutert worden ist. Den Letzteren treten aber noch weitere Fehlergleichungen hinzu, welche für die auf P beobachteten Richtungen oder Winkel, und zwar:

I) bei abhängigen (Richtungs-) Beobachtungen nach Formel (10) bis (16) beziehungsweise (37) bis (40) im § 5,

II) bei unabhängigen (Winkel-) Beobachtungen nach Formel (1) bis (10) im § 6

angesetzt werden, worauf sämmtliche Fehlergleichungen in der widerholt erwänten Weise durch Multiplikation mit den Koëffizienten von δx, δy und gruppenweise Addition u. s. w. zu behandeln sind.

Die Anwendung des Verfarens ist in den nachfolgengen Rechnungen an denselben Beispielen erläutert, welche im § 4 unter lauf. Nummer 6 bis 8 nach der graphischen Methode behandelt worden sind. Dabei sind für den Punkt P_8 abhängige (Richtungs-) Beobachtungen, für den Punkt P_9 unabhängige (Winkel-) Beobachtungen vorausgesetzt, wärend für den Punkt P_{10} Beobachtungen, welche auf Letzterem ausgefürt wären, überhaupt fehlen, also der Fall des Vorwärtseinschneidens vorliegt und desshalb allein die Formeln (1) bis (11) dieses § 7 Anwendung finden.

						Zu bestimmender
2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten						$\mathfrak{y} = -2\,254{,}59$ $\mathfrak{x} = +\ 937{,}81$
P.	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4
y_n	− 1 604,61	+ 696,15	± 0,00	− 1 165,70	− 3 825,29	− 5 029,23
x_n	+ 5 178,57	+ 7 443,10	± 0,00	− 4 288,26	− 3 269,73	+ 2 302,57
$y_n-\mathfrak{y}$	+ 649,98	+ 2 950,74	+ 2 254,59	+ 1 088,89	− 1 570,70	− 2 774,64
$x_n-\mathfrak{x}$	+ 4 240,76	+ 6 505,29	− 937,81	− 5 226,07	− 4 207,54	+ 1 364,76
$\log(y_n-\mathfrak{y})$	2. 812 900	3. 469 931	3. 353 068	3. 036 984	3. 196 093n	3. 443 206n
$\log(x_n-\mathfrak{x})$	3. 627 444	3. 813 266	2. 972 115n	3. 718 176n	3. 624 028n	3. 135 056
$\log \mathrm{tg}\, n_n$	9. 185 456	9. 656 665	0. 380 953n	9. 318 808n	9. 572 065	0. 308 150n
n_n	8°42′ 50,0″	24°23′ 55,2″	112°35′ 6,5″	168°13′ 49,5″	200°28′ 15,3″	296°11′ 28,3″
$\log \sin n_n$	9. 1804	9. 6160	9. 9653	9. 3096	9. 5437n	9. 9530n
$\log \cos n_n$	9. 9950	9. 9594	9. 5844n	9. 9908n	9. 9717n	9. 6448
$cpl \log s_n$	6. 3675	6. 1461	6. 6122	6. 2726	6. 3476	6. 5098
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	0. 8623	1. 0765	1. 8919	0. 8966	1. 2057n	1. 7772n
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 6769n	1. 4199n	1. 5110	1. 5778	1. 6337	1. 4690n
a_n	+ 7,3	+ 11,9	+ 78,0	+ 7,9	− 16,1	− 59,9
b_n	− 47,5	− 26,3	+ 32,4	+ 37,8	+ 43,0	− 29,4
a_m	+ 4,2	aus P_5, P_6, P_1, P_3, P_4.				
b_m	− 5,6					
5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.						$y = -2\,254{,}62$ $x = +\ 937{,}78$
$\delta n_n = a_n \cdot \delta x$	− 0,2″	− 0,4″	− 2,3″	− 0,2″	+ 0,5″	+ 1,8″
$\delta n_n = b_n \cdot \delta y$	+ 1,2	+ 0,7	− 0,8	− 1,0	− 1,1	+ 0,8
y_n-y	+ 650,01	+ 2 950,77	+ 2 254,62	+ 1 088,92	− 1 570,67	− 2 774,61
x_n-x	+ 4 240,79	+ 6 505,32	− 937,78	− 5 226,04	− 4 207,51	+ 1 364,79
$\log(y_n-y)$	2. 812 920	3. 469 936	3. 353 074	3. 036 996	3. 196 085n	3. 443 202n
$\log(x_n-x)$	3. 627 447	3. 813 268	2. 972 101n	3. 718 173n	3. 624 025n	3. 135 066
$\log \mathrm{tg}\, \nu_n$	9. 185 473	9. 656 668	0. 380 973n	9. 318 823n	9. 572 060	0. 308 136n
ν_n	8°42′ 51,2″	24°23′ 55,7″	112°35′ 3,2″	168°13′ 48,1″	200°28′ 14,5″	296°11′ 30,9″

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P. rechts.*	$\varphi \pm \pi$. °	′	″	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = n - \varphi \pm \pi$. $= w - \alpha$. ″	red f.	$\chi = -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \nu - \varphi \pm \pi$. $= \chi - \alpha$. ″	red v.	*pff.*	*pvv.*
.	P_5	8	42	50,9	.	.	.	.	.	− 0,9		.	.	+ 0,3		1	0
.	P_1	112	35	2,3	.	.	.	.	.	+ 4,2		.	.	+ 0,9		18	1
.	P_2	168	13	40,8	.	.	.	.	.	+ 8,7		.	.	+ 7,3		76	53
.	P_4	296	11	25,9	.	.	.	.	.	+ 2,4		.	.	+ 5,0		6	25
.	P_4	.	.	.	0	0	0,0	0	0,0	± 0,0	− 3,0	0	0,0	± 0,0	− 0,4	9	0
.	P_5	.	.	.	72	31	21,7	31	18,0	+ 3,7	+ 0,7	31	20,3	+ 2,3	+ 1,9	0	4
.	P_6	.	.	.	88	12	26,9	12	24,0	+ 2,9	− 0,1	12	24,8	+ 0,8	+ 0,4	0	0
.	P_1	.	.	.	176	23	38,2	23	31,0	+ 7,2	+ 4,2	23	32,3	+ 1,3	+ 0,9	18	1
.	P_3	.	.	.	264	16	47,0	16	46,0	+ 1,0	− 2,0	16	43,6	− 2,4	− 2,8	4	8
									$f_m =$	+ 3,0			$f_m =$	+ 0,4		132	92

Punkt P: 8.

4. *Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.*

P. links.	*P.* rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
.	P_5	1	+ 7,3	− 47,5	− 0,9	5	− 35	− 1	226	+ 4
.	P_1	1	+ 78,0	+ 32,4	+ 4,2	608	+ 253	+ 33	105	+ 14
.	P_2	1	+ 7,9	+ 37,8	+ 8,7	6	+ 30	+ 7	143	+ 33
.	P_4	1	− 59,9	− 29,4	+ 2,4	359	+ 176	− 14	86	− 7
.	P_4	1	− 64,1	− 23,8	− 3,0	411	+ 153	+ 19	57	+ 7
.	P_5	1	+ 3,1	− 41,9	+ 0,7	1	− 13	+ 0	176	− 3
.	P_6	1	+ 7,7	− 20,7	− 0,1	6	− 16	− 0	43	+ 0
.	P_1	1	+ 73,8	+ 38,0	+ 4,2	545	+ 280	+ 31	144	+ 16
.	P_3	1	− 20,3	+ 48,6	− 2,0	41	− 99	+ 4	236	− 10
						1982	+ 729	+ 79	1216	+ 54

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad$ $0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = +\ 79 + 1982\,\delta x + 729\,\delta y$
B) $0 = +\ 54 + 729\,\delta x + 1216\,\delta y$ } *Normalgleichungen.*

C) $0 = +\ 29 + 729\,\delta x + 268\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = +\,0{,}368$

D) $0 = +\ 132 + 3306\,\delta x + 1216\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = +\,1{,}668$

B−*C*) $0 = +\ 25 + 948\,\delta y$
B−*D*) $0 = -\ 78 - 2577\,\delta x$

$\delta y = -\ 0{,}026$
$\mathfrak{y} = -\ 2\,254{,}59$
$y = -\ 2\,254{,}62$

$\delta x = -\ 0{,}030$
$\mathfrak{x} = +\ 937{,}81$
$x = +\ 937{,}78$

6. *Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.*

P_n.	ν_n. °	′	″	α_n. °	′	″	$\nu_0 + \alpha_n$. °	′	″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$ + ″	− ″	φ_n. °	′	″
P_5	8	42	51,2	72	31	18	8	42	48,9	2,3	.	.	.	.
P_6	24	23	55,7	88	12	24	24	23	54,9	0,8	.	.	.	.
P_9	.	.	.	93	4	10	29	15	40,9	.	.	29	15	41,3
P_{11}	.	.	.	97	52	22	34	3	52,9	.	.	34	3	53,3
P_{12}	.	.	.	123	24	26	59	35	56,9	.	.	59	35	57,3
P_1	112	35	3,2	176	23	31	112	35	1,9	1,3	.	.	.	.
P_2	168	13	48,1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
P_3	200	28	14,5	264	16	46	200	28	16,9	.	2,4	.	.	.
P_4	296	11	30,9	0	0	0	296	11	30,9	.	0,0	.	.	.
P_{10}	.	.	.	7	42	5	303	53	35,9	.	.	303	53	36,3
										2,0	.			
									$0 = \frac{+\,2{,}0}{5}$	0,4				

						Zu bestimmender
2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten						$\eta = -\ 604{,}86$ $\xi = +\ 3\,882{,}18$
P.	P_6	P_1	P_8	P_4	P_5	
y_n	+ 696,15	± 0,00	− 2 254,62	− 5 029,23	− 1 604,61	
x_n	+ 7 443,10	± 0,00	+ 937,78	+ 2 302,57	+ 5 178,57	
$y_n-\eta$	+ 1 301,01	+ 604,86	− 1 649,76	− 4 424,37	− 999,75	
$x_n-\xi$	+ 3 560,92	− 3 882,18	− 2 944,40	− 1 579,61	+ 1 296,39	
$\log(y_n-\eta)$	3. 114 280	2. 781 655	3. 217 420n	3. 645 851n	2. 999 891n	
$\log(x_n-\xi)$	3. 551 562	3. 589 076n	3. 468 997n	3. 198 550n	3. 112 736	
$\log tg\, n_n$	9. 562 718	9. 192 579n	9. 748 423	0. 447 301	9. 887 155n	
n_n	20° 4′ 12,6″	171° 8′ 39,4″	209° 15′ 43,4″	250° 21′ 7,7″	322° 21′ 40,9″	
$\log \sin n_n$	9. 5355	9. 1874	9. 6891n	9. 9739n	9. 7858n	
$\log \cos n_n$	9. 9728	9. 9948n	9. 9407n	9. 5267n	9. 8987	
$cpl \log s_n$	6. 4212	6. 4057	6. 4717	6. 3281	6. 7859	
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	1. 2711	0. 9075	1. 4752n	1. 6164n	1. 8861n	
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 7084n	1. 7149	1. 7268	1. 1692	1. 9990n	
a_n	+ 18,7	+ 8,1	− 29,9	− 41,3	− 76,9	
b_n	− 51,1	+ 51,9	+ 53,3	+ 14,8	− 99,8	
5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.						$y = -\ 604{,}83$ $x = +\ 3\,882{,}12$
$\delta n_n = a_n \cdot \delta x$	− 1,2″	− 0,5″	+ 1,9″	+ 2,6″	+ 4,8″	
$\delta n_n = b_n \cdot \delta y$	− 1,4	+ 1,5	+ 1,5	+ 0,4	− 2,8	
y_n-y	+ 1 300,98	+ 604,83	− 1 649,79	− 4 424,40	− 999,78	
x_n-x	+ 3 560,98	− 3 882,12	− 2 944,34	− 1 579,55	+ 1 296,45	
$\log(y_n-y)$	3. 114 270	2. 781 633	3. 217 428n	3. 645 854n	2. 999 904n	
$\log(x_n-x)$	3. 551 570	3. 589 069n	3. 468 988n	3. 198 534n	3. 112 756	
$\log tg\, \nu_n$	9. 562 700	9. 192 564n	9. 748 440	0. 447 320	9. 887 148n	
ν_n	20° 4′ 9,8″	171° 8′ 40,5″	209° 15′ 46,8″	250° 21′ 10,6″	322° 21′ 42,5″	

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P.* rechts.	$\varphi \pm \pi$. °	′	″	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = n - \varphi \pm \pi$. $= w - \alpha$. ″	χ $= -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \nu - \varphi \pm \pi$. $= \chi - \alpha$. ″	*pff.*	*pvv.*
.	P_6	20	4	8,5	.	.	.	.	.	+ 4,1	.	.	+ 1,3	17	2
.	P_1	171	8	45,3	.	.	.	.	.	− 5,9	.	.	− 4,8	35	23
.	P_8	209	15	41,3	.	.	.	.	.	+ 2,1	.	.	+ 5,5	4	30
.	P_5	322	21	40,9	.	.	.	.	.	± 0,0	.	.	+ 1,6	0	3
P_6	P_1	.	.	.	151	4	26,8	4	32,0	− 5,2	4	30,7	− 1,3	27	2
P_1	P_8	.	.	.	38	7	4,0	7	9,0	− 5,0	7	6,3	− 2,7	25	7
P_8	P_4	.	.	.	41	5	24,3	5	29,0	− 4,7	5	23,8	− 5,2	22	27
P_4	P_5	.	.	.	72	0	33,2	0	34,0	− 0,8	0	31,9	− 2,1	1	4
P_5	P_6	.	.	.	57	42	31,7	42	26,0	+ 5,7	42	27,3	+ 1,3	32	2
														163	100

Punkt P: 9.

4. *Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.*

P. links.	*P.* rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
.	P_6	1	+ 18,7	— 51,1	+ 4,1	35	— 96	+ 8	261	— 21
.	P_1	1	+ 8,1	+ 51,9	— 5,9	7	+ 42	— 5	269	— 31
.	P_8	1	— 29,9	+ 53,3	+ 2,1	89	— 159	— 6	284	+ 11
.	P_5	1	— 76,9	— 99,8	± 0,0	591	+ 767	+ 0	996	± 0
P_6	P_1	1	— 10,6	+ 103,0	— 5,2	11	— 109	+ 6	1061	— 54
P_1	P_8	1	— 38,0	+ 1,4	— 5,0	144	— 5	+ 19	0	— 1
P_8	P_4	1	— 11,4	— 38,5	— 4,7	13	+ 44	+ 5	148	+ 18
P_4	P_5	1	— 35,6	— 114,6	— 0,8	127	+ 408	+ 3	1313	+ 9
P_5	P_6	1	+ 95,6	+ 48,7	+ 5,7	914	+ 466	+ 54	237	+ 28
						1931	+ 1358	+ 84	4569	— 41

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad 0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = +\ 84 + 1931\,\delta x + 1358\,\delta y$
B) $0 = -\ 41 + 1358\,\delta x + 4569\,\delta y$
} *Normalgleichungen.*

C) $0 = +\ 59 + 1358\,\delta x + 955\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = +0{,}703$

D) $0 = +\ 282 + 6497\,\delta x + 4569\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = +3{,}36$

B—C) $0 = -\ 100 + 3614\,\delta y$
B—D) $0 = -\ 323 - 5139\,\delta x$

$\delta y = +\ 0{,}028$

$\mathfrak{y} = -\ 604{,}86$

$y = -\ 604{,}83$

$\delta x = -\ 0{,}063$

$\mathfrak{x} = +\ 3\,882{,}18$

$x = +\ 3\,882{,}12$

6. *Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.*

P_n.	ν_n. °	′	″	α_n. °	′	″	$\nu_0 + \alpha_n$. °	′	″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$ + ″	− ″	φ_n. °	′	″
P_6	20	4	9,8	129	42	56	20	4	6,6	3,2	.	.	.	.
P_{11}	.	.	.	152	59	47	43	20	57,6	.	.	43	20	59,6
P_{12}	.	.	.	210	23	12	100	44	22,6	.	.	100	44	24,6
P_1	171	8	40,5	280	47	26	171	8	36,6	3,9	.	.	.	.
P_8	209	15	46,8	318	54	33	209	15	43,6	3,2	.	.	.	.
P_{10}	.	.	.	356	32	21	246	53	31,6	.	.	246	53	33,6
P_4	250	21	10,6	0	0	0	250	21	10,6	0,0	.	.	.	.
P_5	322	21	42,5	72	0	32	322	21	42,6	.	0,1	.	.	.
										10,2	.			
							$0 = \frac{+\ 10{,}2}{5} =$			2,0	.			

						Zu bestimmender
2. Berechnung der Neigungen n u. s. w. aus den genäherten Koordinaten						$\mathfrak{y} = -4\,294{,}06$ $\mathfrak{x} = +2\,307{,}88$
P.	P_5	P_6	P_9	P_1	P_8	
y_n	−1 604,61	+ 696,15	− 604,83	± 0,00	−2 254,62	
x_n	+5 178,57	+7 443,10	+3 882,12	± 0,00	+ 937,78	
$y_n - \mathfrak{y}$	+2 689,45	+4 990,21	+3 689,23	+4 294,06	+2 039,44	
$x_n - \mathfrak{x}$	+2 870,69	+5 135,22	+1 574,24	−2 307,88	−1 370,10	
$\log(y_n - \mathfrak{y})$	3. 429 664	3. 698 119	3. 566 936	3. 632 868	3. 309 511	
$\log(x_n - \mathfrak{x})$	3. 457 987	3. 710 559	3. 197 071	3. 363 213n	3. 136 752n	
$\log \mathrm{tg}\, n_n$	9. 971 677	9. 987 560	0. 369 865	0. 269 655n	0. 172 759n	
n_n	43°7′58,8″	44°10′46,2″	66°53′29,3″	118°15′22,4″	123°53′35,8″	
$\log \sin n_n$	9. 8349	9. 8432	9. 9637	9. 9449	9. 9191	
$\log \cos n_n$	9. 8632	9. 8556	9. 5938	9. 6752n	9. 7464n	
$cpl \log s_n$	6. 4052	6. 1451	6. 3968	6. 3120	6. 6096	
$\log \varrho'' \frac{\sin n_n}{s_n}$	1. 5545	1. 3027	1. 6749	1. 5713	1. 8431	
$\log\left(-\varrho'' \frac{\cos n_n}{s_n}\right)$	1. 5828n	1. 3151n	1. 3050n	1. 3016	1. 6704	
a	+35,9	+20,1	+47,3	+37,3	+69,7	
b	−38,3	−20,7	−20,2	+20,0	+46,8	
5. Berechnung der definitiven Neigungen ν.						$y = -4\,294{,}14$ $x = +2\,307{,}93$
$\delta n_n = \begin{cases} a_n \cdot \delta x \\ b_n \cdot \delta y \end{cases}$	+ 1,8″ + 2,9	+ 1,0″ + 1,6	+ 2,4″ + 1,5	+ 1,9″ − 1,5	+ 3,5″ − 3,6	
$y_n - y$	+2 689,53	+4 990,29	+3 689,31	+4 294,14	+2 039,52	
$x_n - x$	+2 870,64	+5 135,17	+1 574,19	−2 307,93	−1 370,15	
$\log(y_n - y)$	3. 429 677	3. 698 126	3. 566 945	3. 632 876	3. 309 528	
$\log(x_n - x)$	3. 457 979	3. 710 555	3. 197 057	3. 363 223n	3. 136 768n	
$\log \mathrm{tg}\, \nu_n$	9. 971 698	9. 987 571	0. 369 888	0. 269 653n	0. 172 760n	
ν_n	43° 8′ 3,8″	44°10′48,8″	66°53′33,3″	118°15′22,7″	123°53′35,6″	

3. Formirung der Fehler f und v.

P. links.	*P.* rechts.	$\varphi \pm \pi$. °	′	″	$w = -n_l + n_r$. °	′	″	α. ′	″	$f = n - \varphi \pm \pi$. $= w - \alpha$. ″	χ $= -\nu_l + \nu_r$. ′	″	$v = \nu - \varphi \pm \pi$. $= \chi - \alpha$. ″	*pff.*	*pvv.*
.	P_5	43	7	57,9	.	.	.	.	.	+ 0,9	.	.	+ 5,9	1	35
.	P_6	44	10	58,5	.	.	.	.	.	− 12,3	.	.	− 9,7	151	94
.	P_9	66	53	33,6	.	.	.	.	.	− 4,3	.	.	− 0,3	18	0
.	P_1	118	15	21,3	.	.	.	.	.	+ 1,1	.	.	+ 1,4	1	2
.	P_8	123	53	36,3	.	.	.	.	.	− 0,5	.	.	− 0,7	0	0
														171	131

Punkt P: 10.

4. Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung.

P. links.	*P.* rechts.	*p.*	*a.*	*b.*	*f.*	*paa.*	*pab.*	*paf.*	*pbb.*	*pbf.*
.	P_5	1	+ 35,9	− 38,3	+ 0,9	129	− 137	+ 3	147	− 3
.	P_6	1	+ 20,1	− 20,7	− 12,3	40	− 42	− 25	43	+ 25
.	P_9	1	+ 47,3	− 20,2	− 4,3	224	− 96	− 20	41	+ 9
.	P_1	1	+ 37,3	+ 20,0	+ 1,1	139	+ 75	+ 4	40	+ 2
.	P_8	1	+ 69,7	+ 46,8	− 0,5	486	+ 326	− 3	219	− 2
						1018	+ 126	− 41	490	+ 31

$0 = [paf] + [paa]\,\delta x + [pab]\,\delta y.$ $\qquad 0 = [pbf] + [pab]\,\delta x + [pbb]\,\delta y.$

A) $0 = -\ 41 + 1018\,\delta x + 126\,\delta y$
B) $0 = +\ 31 + 126\,\delta x + 490\,\delta y$
} *Normalgleichungen.*

C) $0 = -\ 5 + 126\,\delta x + 16\,\delta y$ *durch Multipl. d. Gleichung. A mit* $\frac{[pab]}{[paa]} = +0{,}124$

D) $0 = -\ 159 + 3960\,\delta x + 490\,\delta y$ - - - - - - $\frac{[pbb]}{[pab]} = +3{,}89$

B–C) $0 = +\ 36 + 474\,\delta y$
B–D) $0 = +\ 190 - 3834\,\delta x$

$\delta y = -\ 0{,}076$
$y = -\ 4\,294{,}06$
$y = -\ 4\,294{,}14$

$\delta x = +\ 0{,}050$
$x = +\ 2\,307{,}88$
$x = +\ 2\,307{,}93$

6. Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte.

P_n.	ν_n. °	′	″	α_n. °	′	″	$\nu_0 + \alpha_n$. °	′	″	$\nu_n - (\nu_0 + \alpha_n)$ + ″	− ″	φ_n. °	′	″
P_5	43	8	3,8											
P_6	44	10	48,8											
P_9	66	53	33,3											
P_1	118	15	22,7											
P_8	123	53	35,6											

Auf P_{10} hat eine Winkelmessung nicht stattgefunden.

Als 1. Abteilung wird dem Rechenformular hier zur Berechnung der genäherten Koordinaten y, x aus dem Schnitte zweier Visirstralen die Abteilung 2 aus dem Formular des § 4 voranzugehen haben.

Der Lauf der Rechnung wird folgender sein:

1) Eintragung der Neigungen $\varphi \pm \pi$ in die Abteilung 3 aus den früheren Rechnungen, wie im § 4;
2) Bereehnung der genäherten Koordinaten y, x in Abteilung 1;
3) Berechnung der Neigungen n und der Hülfsgröfsen a, b in Abteilung 2;
4) Formirung der Fehler f in Abteilung 3;
5) Formirung der Normalgleichungen und deren Auflösung in Abteilung 4;
6) Berechnung der definitiven Neigungen in Abteilung 5;
7) Formirung der Fehler v und der Quadratsummen ff und vv in Abteilung 3.

Endlich tritt für die Ableitung der Neigungen φ der Visirstralen zur Bestimmung weiterer Punkte dem Rechenformular noch die Abteilung 6 hinzu, welche mit der Abteilung 8 des Rechenformulars im § 4 gleiche Einrichtung hat.

Im Uebrigen wird, um Widerholungen zu vermeiden, zur Erläuterung der Rechnung auf die §§ 5 und 6 verwiesen.

Die erläuterte Art der Behandlung des „Einschneidens“ nach der Methode der kleinsten Quadrate durch Ansetzung besonderer Bedingungsgleichungen für die Neigungen $\varphi \pm \pi$ und für die auf dem zu bestimmenden Punkte P beobachteten Richtungen oder Winkel wird namentlich dann am Platze sein, wenn auf P verhältnismäfsig nur wenige derjenigen Stralen beobachtet worden sind, für welche die Neigungen φ durch die Beobachtungen auf den gegebenen Punkten bestimmt sind. Anderenfalls wird es unbedenklich sein und praktisch zu demselben Schlussergebnis füren, aus den Beobachtungen auf P nach § 4 die Neigungen ψ, sowie weiter die Neigungen $\mu = \frac{\varphi \pm \pi + \psi}{2}$ herzuleiten und dann die so erhaltenen Neigungen ganz so zu behandeln, wie es im gegenwärtigen § 7 durch Formel (1) bis (11) an den Neigungen φ für den Fall des Vorwärtseinschneidens gezeigt worden ist, und zwar mit Beachtung des Umstandes, dass die Stralengewichte t des § 4, welche im Allgemeinen $= 1$ oder $= 2$ sein werden, als p in Rechnung gestellt werden.

Auch die am Schlusse des § 4 erläuterte gleichzeitige Bestimmung der Koordinaten für zwei durch einen Stral verbundene Punkte mittels successiver Annäherung lässt sich in analoger Weise mit Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in ganz befriedigender Weise bewirken. Hat dabei nur auf den zu bestimmenden beiden Punkten die Winkelmessung stattgefunden, so liegt die „Aufgabe der unzugänglichen Distanz“ vor, welche im § 36 der „Trigon. und polygon. Rechnungen“ in ihrer dirckten Auflösung behandelt ist, jedoch in Letzterer kaum schneller zum Ziele füren wird, als in der Auflösung durch successive Annäherung.

Im Allgemeinen werden die vorstehend erläuterten Arten der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe des „Einschneidens“ keinen wesentlich gröfseren Zeitaufwand bedingen, als die graphische Lösung, da hierbei die Rechnungen in den Abteilungen 3, 4, 5 des Formulars im § 4, die Konstruktion der Schnittfigur und die Entnahme der Abstände der Schnittpunkte δy, δx aus der Figur u. s. w. entbehrlich werden. Die graphische Lösung fürt aber für denjenigen wesentlich schneller zum Ziele, welcher die notwendige Uebung erlangt hat, um den zu bestimmenden Punkt P nach Schätzung in die Schnittfigur zutreffend einzeichnen zu können. Aufserdem gestaltet sich die graphische Lösung in dem besondern Falle einfacher, wenn ein Punkt durch nur drei Stralen bestimmt ist und das an Figur 6 im § 3 erläuterte Verfaren zur Anwendung gebracht wird.

Im Uebrigen muss zwar der Methode der kleinsten Quadrate an sich der Vorzug zugestanden werden. Von erheblicher praktischer Bedeutung wird aber die dadurch erzielte gröfsere Schärfe der Punktbestimmung nicht sein, wie denn auch in den oben durchgefürten Beispielen fast übereinstimmende Resultate erreicht worden sind. Denn es hat ergeben:

	die graphische Lösung.		die Anwendung der Methode d. kl. Quadrate.	
	y	x	y	x
P_8	— 2 254,64	+ 937,78	— 2 254,62	+ 937,78
P_9	— 604,82	+ 3 882,12	— 604,83	+ 3 882,12
P_{10}	— 4 294,16	+ 2 307,93	— 4 294,14	+ 2 307,93

wonach die bestehenden kleinen Abweichungen sich fast nur als unvermeidliche Ungenauigkeiten der letzten Stellen darstellen.

Jedenfalls bietet die graphische Lösung den nicht zu unterschätzenden Vorteil, dass man ein vollständiges Bild davon erhält, wie sich die Visirstralen auf dem zu bestimmenden Punkte kreuzen beziehungsweise einander verfehlen. Dies schärft den praktischen Blick und klärt sofort darüber auf, wo und wie man etwaige Missstimmungen aufzusuchen und zu vermeiden hat. Will man sich diesen Vorteil auch bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate verschaffen, so ist man in allen Fällen, in denen man die Rechnung blos mit den Neigungen φ oder μ ausfürt, in der Lage, die Elemente zur Aufzeichnung der Schnittfigur in einfachster Weise dadurch zu erhalten, dass man die bestehen gebliebenen Fehler $v = \nu - \varphi \pm \pi$ oder $v = \nu - \mu$, welche in Sekunden ausgedrückt sind, in Längenmafs berechnet nach den Formeln:

$$(12) \qquad h_a = \frac{S_a v_a}{\varrho''}, \quad \Big| \quad h_b = \frac{S_b v_b}{\varrho''}, \quad \Big| \quad \ldots \ \ldots \quad h_n = \frac{S_n v_n}{\varrho''}.$$

Nun nehme man einen Kreis mit dem definitiven Punkte P als Mittelpunkt und trage um Letzteren nach der im § 2 erläuterten Art die Neigungen $\varphi \pm \pi$ oder μ auf, wodurch man die Richtungen der Stralen PP_a, PP_b, ..., PP_n erhält. Nach einem verjüngten Mafsstabe ziehe man alsdann in dem Abstande h_a eine Parallele zu PP_a, in dem Abstande h_b eine Parallele zu PP_b, ..., in dem Abstande h_n eine Parallele zu PP_n, indem man zugleich die Vorzeichen der h_a, h_b, ..., h_n beachtet, dergestalt, dass die Parallele, wenn h positiv, von P aus gesehen zur rechten Seite, wenn h negativ zur linken Seite der betreffenden Stralenrichtung gezogen wird. Diese Parallelen stellen die wirkliche Lage der Visirstralen dar, welche mit den unverbesserten Neigungen ν_n von den gegebenen Punkten ausgehen. Die Berechnung der h ist mit Bezug auf den oben Seite 66 und 67 behandelten Punkt P_{10} nachstehend beispielsweise ausgefürt:

	P_5	P_6	P_9	P_1	P_8
v_n	+ 5,9	— 9,7	— 0,3	+ 1,4	— 0,7
log v_n	0. 771	0. 987n	9. 477n	0. 146	9. 845n
log s_n	3. 595	3. 855	3. 603	3. 688	3. 390
log h_n	9. 052	9. 528n	7. 766n	8. 520	7. 921n
h_n	+ 0,113	— 0,337	— 0,006	+ 0,033	— 0,009

Bei Ziehung der Summe $\log v_n^{\bullet} + \log s_n + \text{cpl}\log \varrho'' = \log h_n$ wird $\text{cpl}\log \varrho'' = 4.686-10$ für alte Kreisteilung oder $= 4.196-10$ für neue Kreisteilung zweckmäfsig auf ein Stückchen Papier geschrieben und über $\log v_n$ gehalten.

Hat man so die Abstände h gefunden, so kann man nunmehr auch leicht den mittleren Fehler der Bestimmung des Punktes P nach Formel (9) im § 2, nämlich:

$$(13) \qquad M = \sqrt{\frac{[uhh]}{(n-2)\,[u]}} = \sqrt{\frac{[\frac{t}{s}\,hh]}{(n-2)\,[\frac{t}{s}]}}$$

berechnen.

Druck von W. Pormetter in Berlin, C., Neue Grünstr. 30.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gauss, Friedrich Gustav,

Die trigonometrische Punktenbestimmung durch Einschneiden

Halle/S. 1877

Math.p. 158 o#Beibd.1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11358681-1